

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.В. Старченко, Р.Б. Нутерман,
Е.А. Данилкин

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ
И ПЕРЕНОСА ПРИМЕСИ
В УЛИЧНЫХ КАНЬОНАХ

Издательство Томского университета
2015

УДК 532.5
ББК 22.253.3
С 77

Рецензенты:

кафедра теоретической механики Национального исследовательско-
го Томского государственного университета;
доктор физико-математических наук, профессор А.Ф. Курбацкий

Старченко А.В., Нутерман Р.Б., Данилкин Е.А.

С77 Численное моделирование турбулентных течений и переноса
примеси в уличных каньонах. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2015.
– 252 с.

ISBN 978-5-7511-2396-3
DOI: 10/17223/9785751123963

В книге представлены математические модели и численные методы для исследования турбулентных течений и переноса примеси в элементах городской застройки – уличных каньонах. Математические модели базируются на использовании осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, замыкание которых проводится с помощью полуэмпирических моделей турбулентности, или на вихреразрешающих моделях турбулентности. В моделях учитывается влияние образующих уличные каньоны зданий, растительности, расположенной между зданиями, и движущегося по улицам потока автомобилей. Для численной реализации рассматриваемых математических моделей используются метод конечных объемов, явные и неявные разностные схемы высокого порядка аппроксимации, различные вычислительные алгоритмы, позволяющие получать согласованные поля скорости и давления. Для вихреразрешающей модели уличного каньона подробно рассматриваются эффективные подходы решения сеточных уравнений на многопроцессорной технике с распределенной памятью. Разработанные математические модели были применены для исследования движения воздуха и переноса примеси для различных участков городской застройки, установлены зависимости характера течения и интенсивности накопления примеси от конфигурации каньона, расположения в нем элементов городской растительности, интенсивности движения потока автомобилей и ряда других параметров.

Для научных работников, аспирантов и студентов, применяющих методы вычислительной гидродинамики для исследования течений в окружающей среде и технических устройствах и аппаратах.

УДК 532.5
ББК 22.253.3

ISBN 978-5-7511-2396-3

© А.В. Старченко, Р.Б. Нутерман, Е.А. Данилкин, 2015

TOMSK STATE UNIVERSITY

**A.V. Starchenko, R.B. Nuterman,
E.A. Danilkin**

**NUMERICAL STUDY OF TURBULENT
FLOWS AND POLLUTION TRANSPORT
IN STREET CANYONS**

Tomsk University Press
2015

Reviewers:
Department of Theoretical Mechanics of National Research Tomsk
State University;
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor A. F. K u r b a t s k y

Starchenko A.V., Nuterman R.B., Danilkin E.A.

C77 Numerical study of turbulent flows and pollution transport in
street canyons. – Tomsk: Tomsk University Press, 2015. – 252 p.

ISBN 978-5-7511-2396-3

DOI: 10.17223/9785751123963

This book aims to describe mathematical models and numerical methods for studying aerodynamics and pollution transport inside urban canopy, i.e. street canyons. The mathematical models are based on Reynolds- and Spatially-Averaged Navier-Stokes equations with semi-empirical turbulent and large eddy simulation closures, respectively. The models predict effects from buildings forming street canyons, urban vegetation between buildings and traffic. The numerical solution of the models is based on finite volume method with high-order implicit and explicit finite-difference schemes and different numerical algorithms for velocity-pressure correction. There is a detailed description of the efficient numerical solution methods developed for multiprocessor computers with distributed memory for partial differential equations of the large eddy simulation model. These mathematical models were applied for investigation of turbulent flow and pollution transport around different urban canopy elements. Variability of urban airflow characteristics and intensity of pollution accumulation was investigated for different street canyon configurations, urban vegetation sites, traffic intensities and other factors.

This book could be used by scientists, Ph.Ds and students who apply computational fluid dynamics for studying environmental flows and airflows in technical equipment and devices.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	9
1 Аналитический обзор результатов экспериментальных и теоретических исследований аэродинамики и переноса примеси в элементах городской застройки.....	13
1.1 Экспериментальные исследования и полевые измерения.....	13
1.1.1 Наблюдения за полем ветра и концентрацией примеси в уличных каньонах.....	16
1.1.2 Полевые эксперименты и физическое моделирование в массивных элементах городской застройки.....	22
1.2 Микромасштабные метеорологические модели для исследования аэродинамики и переноса примеси в приземном слое над городом.....	29
1.2.1 Простые полумпирические модели переноса примеси в уличных каньонах.....	35
1.2.2 Микромасштабные модели аэродинамики и переноса примеси, использующие RANS-подход.....	42
1.2.2.1 Основные уравнения и моделирование турбулентности.....	42
1.2.2.2 Параметризация влияния городской растительности.....	45
1.2.2.3 Параметризация генерации турбулентности движущимся в уличном каньоне автотранспортом.....	54
1.2.2.4 Влияние инсоляции на перенос примеси в уличном каньоне.....	55
1.2.3 Микромасштабные модели аэродинамики и переноса примеси в городской застройке, использующие LES-подход.....	56
1.2.3.1 Характерные особенности вихреразрешающего моделирования.....	56
1.2.3.2 Выбор подсеточной модели турбулентности.....	61
1.2.3.3 Задание начальных и граничных условий.....	68
1.2.4 Обзор численных методов и параллельных технологий, применяемых для компьютерной реализации микромасштабных метеорологических моделей.....	74
2 Математическое моделирование турбулентного течения воздуха и переноса примеси в элементах городской застройки на основе RANS-подхода.....	78
2.1 Физическая и математическая модель исследуемого процесса.....	78
2.2 Выбор модели турбулентности для принятого RANS-подхода. Учет влияния городской растительности и движущегося автотранспорта.....	80
2.2.1 «к-ε»-модель и замыкание Буссинеска.....	80
2.2.2 «к-ε»-модель с нелинейной зависимостью тензора анизотропии турбулентности от тензоров скорости деформации и завихренности.....	82
2.2.3 Дифференциальная модель напряжений Рейнольдса.....	83
2.2.4 Уравнение переноса примеси.....	85
2.2.5 Граничные условия.....	85
2.2.6 Параметризация влияния городской растительности.....	89
2.2.7 Параметризация влияния на турбулентность движущегося автотранспорта.....	90
2.3 Численный метод решения.....	91
2.3.1 Аппроксимация адвективно-диффузионного уравнения переноса. Решение сеточных уравнений.....	91

2.3.2	Схема MLU (MLU – Monotonized Linear – Upwind).....	95
2.3.3	Применение схемы MLU.....	97
2.3.4	Алгоритм решения уравнений Навье–Стокса.....	103
2.3.5	Численная реализация метода пристеночных функций.....	104
2.4	Течение за обращённым назад уступом.....	106
2.5	Течение за отдельно стоящим деревом.....	110
2.6	Результаты тестирования численной модели (течение вокруг куба).....	113
2.7	Обтекание расположенных последовательно по потоку двух кубов.....	119
2.8	Расчёт зависимости концентрации в уличном каньоне от направления ветра.....	121
2.9	Численное исследование движения воздуха и переноса примеси в уличном каньоне в двумерной постановке.....	123
2.10	Расчет пространственной аэродинамики и переноса примеси в районе ул. Гёттенгер в г. Ганновер.....	137
2.11	Численное исследование движения воздуха и переноса примеси для условий MUST (Mock Urban Setting Trial) эксперимента.....	140
2.12	Численное исследование аэродинамической картины и распространения выбросов автотранспорта для участка городской застройки Томска.....	155
3	Вихреразрешающее моделирование движения воздуха и переноса примеси в уличных каньонах.....	161
3.1	Физическая и математическая постановка задачи.....	161
3.1.1	Физическая постановка задачи.....	161
3.1.2	Математическая постановка задачи.....	162
3.1.3	Подсеточная модель Смагоринского и замыкание динамического типа.....	163
3.1.4	Уравнение переноса тепла или концентрации примеси.....	164
3.1.5	Граничные условия.....	164
3.2	Численный метод решения дифференциальной задачи для LES-подхода.....	166
3.2.1	Построение вычислительной сетки.....	166
3.2.2	Аппроксимация уравнения переноса.....	168
3.2.3	Алгоритм решения нестационарных уравнений движения.....	179
3.2.4	Численная реализация динамической модели.....	182
3.2.5	К выбору метода решения сеточных уравнений.....	185
3.2.6	Тестирование численного метода.....	192
3.3	Параллельная реализация численного метода решения разностной задачи.....	195
3.3.1	Подходы к распараллеливанию численного метода решения адвективно-диффузионного уравнения.....	195
3.3.2	Распараллеливание итерационных методов решения СЛАУ и анализ эффективности полученных реализаций.....	200
3.4	Результаты применения вихреразрешающей модели турбулентности.....	211
3.4.1	Турбулентное течение в прямолинейном канале.....	211
3.4.2	Обтекание цилиндра квадратного поперечного сечения.....	214
3.4.3	Исследование движения воздуха и переноса примеси в уличном каньоне.....	220
3.4.4	Численное моделирование движения воздуха и переноса примеси от автотранспорта для участка городской застройки Томска.....	226
	Заключение.....	233
	Список литературы.....	236
	Список сокращений и обозначений.....	249

CONTENTS

Introduction.....	9
1 Overview of experimental and theoretical studies of aerodynamics and pollution transport in the urban canopy.....	13
1.1 Experiments and field measurements.....	13
1.1.1 Observations of wind field and pollution transport in street canyons.....	16
1.1.2 Field observations and wind tunnel measurements for urban canopy.....	22
1.2 Micro-scale meteorological models for aerodynamics and pollution transport studies in the urban boundary layer.....	29
1.2.1 Simple semi-empirical models of pollution transport in street canyons.....	35
1.2.2 Micro-scale models of urban aerodynamics and pollution transport based on RANS approach.....	42
1.2.2.1 Governing equations for turbulence modeling.....	42
1.2.2.2 Urban vegetation parameterization.....	45
1.2.2.3 Traffic-induced turbulence in a street canyon.....	54
1.2.2.4 Buoyancy impact on pollution transport in a street canyon.....	55
1.2.3 Micro-scale models of urban aerodynamics and pollution transport based on LES approach.....	56
1.2.3.1 Specific aspects of eddy-resolving modeling.....	56
1.2.3.2 Selection of sub-grid scale turbulence model.....	61
1.2.3.3 Setup of initial and boundary conditions.....	68
1.2.4 Overview of numerical and parallelization methods applied for computer implementation of micro-scale meteorological models.....	74
2 Simulation of turbulent air-flow and pollution transport in the urban canopy based on RANS approach.....	78
2.1 Physical and mathematical models of the investigated process.....	78
2.2 Selecting turbulent closure for the RANS approach. Urban vegetation and traffic-induced turbulence parameterizations.....	80
2.2.1 «k- ϵ » model and Boussinesque closure.....	80
2.2.2 «k- ϵ » model with nonlinear eddy-viscosity closure, which depends on the strain-rate and vorticity tensors.....	82
2.2.3 Reynolds stress model.....	83
2.2.4 Equations of pollution transport.....	85
2.2.5 Border conditions.....	85
2.2.6 Urban vegetation parameterization.....	89
2.2.7 Traffic-induced turbulence parameterizations.....	90
2.3 Numerical method of solution.....	91
2.3.1 Discretization of the advection-diffusion equation. Solution of discretized equations.....	91
2.3.2 MLU scheme (MLU-Monotonized Linear – Upwind).....	95
2.3.3 Application of MLU.....	97
2.3.4 Solution algorithm of Navier-Stokes equations.....	103
2.3.5 Numerical implementation of wall functions.....	104
2.4 Flow over backward facing step.....	106
2.5 Air flow around a single tree.....	110

2.6	Approbation of the numerical model for flow around a single cube mounted on the bottom of a plate	113
2.7	Turbulent flow around two interfering surface-mounted cubic obstacles in tandem	119
2.8	Prediction of pollutant concentration in a street canyon in dependence of wind direction	121
2.9	Numerical study of two dimensional airflow and pollution transport in a street canyon	123
2.10	Computation of aerodynamics and pollution transport in Göttingen street, Hannover	137
2.11	Numerical study of airflow and pollution transport according to MUST (Mock Urban Setting Trial) experiment	140
2.12	Numerical study of aerodynamics and pollution transport for an area of urban canopy in the city of Tomsk	155
3	Large eddy-simulation and pollution transport modeling in street canyons	161
3.1	Physical and mathematical problem statements	161
3.1.1	Physical problem statement	161
3.1.2	Mathematical problem statement	162
3.1.3	Smagorinsky and dynamic sub-grid scale models	163
3.1.4	Governing equations of heat and pollution transport	164
3.1.5	Boundary conditions	164
3.2	Numerical solution method for differential equations	166
3.2.1	Numerical grid generation	166
3.2.2	Space-derivatives discretization of governing equations	168
3.2.3	Time-derivatives discretization of governing equations	179
3.2.4	Numerical implementation of dynamic LES model	182
3.2.5	On solution method of discretized equations	185
3.2.6	Evaluation of numerical method	192
3.3	Parallel implementation of numerical solution method of discretized equations	195
3.3.1	Different parallelization approaches for discretized advection-diffusion equation	195
3.3.2	Parallelization of iterative solution methods for system of linear equations and analysis of their efficiencies	200
3.4	Results of large-eddy simulation modeling	211
3.4.1	Turbulent flow in a square duct	211
3.4.2	Airflow around wall-mounted square cylinder	214
3.4.3	Study of airflow and pollution transport in a street canyon	220
3.4.4	Numerical study of aerodynamics and pollution transport for an area of urban canopy in the city of Tomsk	226
	Conclusion	233
	References	236
	List of common symbols and abbreviations	249

Предисловие

Начиная с середины XX в. процесс урбанизации общества происходит высокими темпами, охватывая все большее число развивающихся стран. Наиболее интенсивно растут сверхкрупные и крупнейшие города, которые, как считается, полнее удовлетворяют многообразные запросы людей. Если в начале XX в. население так называемых городов-мегаполисов не превышало 5 %, то к началу XXI в. его доля превысила треть населения мира. Вместе с тем опыт даже наиболее успешно развивающихся мегаполисов свидетельствует о трудностях решения целого ряда проблем, связанных с обеспечением благополучной в социально-экономическом отношении среды обитания горожан. Эти проблемы характерны и для большинства российских городов, многие из которых признаются экспертами зонами экологического бедствия. Наиболее важным элементом городских территорий любого мегаполиса являются зоны плотной жилой застройки центральной (исторической) части города, где требуется обеспечить в максимальной степени социальный и экологический комфорт населения при рациональном использовании ресурсов и городских земель. Основными источниками загрязнения воздуха жилых территорий являются промышленные предприятия, отопительные котельные и автомобильный транспорт. Среди них наиболее значительную долю загрязнения атмосферного воздуха в пределах жилых территорий вносит автотранспорт. Это подвижный источник загрязнения, специфика которого проявляется в его низком расположении и непосредственной близости к зонам жилой застройки. Все это приводит к тому, что автотранспорт создает в городах обширные и устойчивые зоны, в которых предельно допустимая концентрация загрязняющих веществ в атмосферном воздухе превышена в несколько раз.

Современные методы вычислительной гидродинамики позволяют решать задачи, связанные с переносом атмосферных примесей внутри городской застройки. Однако необходимо учитывать тот факт, что правильное предсказание турбулентной структуры воздушного потока обеспечивает корректное моделирование не только полей скорости и давления, но и процессов, связанных с рассеянием и турбулентным перемешиванием выбросов в атмосфере города.

Поэтому особое внимание необходимо уделять методике моделирования турбулентности, а также схеме турбулентного замыкания в рамках выбранного подхода.

Цель книги состоит в описании имеющегося математического аппарата для численного моделирования турбулентных течений и переноса примеси в элементах городской застройки. Представлены новые результаты по исследованию влияния конфигурации уличных каньонов, расположения элементов городской растительности, интенсивности движения транспортного потока на формирование циркуляций воздуха и образования участков с повышенной концентрацией примеси. Большое внимание уделено эффективным численным методам решения уравнений Навье–Стокса и моделирования турбулентности и их реализации на суперкомпьютерной технике.

Книга состоит из трех глав. Первая из них посвящена современному состоянию экспериментальных и теоретических исследований аэродинамики и переноса примеси в элементах городской застройки. Подробно рассматриваются имеющиеся результаты, полученные в аэродинамических трубах при проведении физического моделирования с моделями городской застройки и в реальных условиях современных урбанизированных территорий. Много внимания уделяется описанию микромасштабных метеорологических моделей, использующих RANS-подход (Reynolds averaged Navie–Stokes) с осредненными по Рейнольдсу уравнениями Навье–Стокса и полуэмпирическими дифференциальными моделями турбулентности или LES-подход (Large Eddy Simulation) с отфильтрованными вихререшающими уравнениями Навье–Стокса, замкнутыми с помощью подсеточных моделей турбулентности. Рассмотрены различные способы параметризации влияния городской растительности и движущегося автотранспорта на исследуемые процессы. Дан краткий обзор вычислительных технологий, использующихся при численном решении уравнений микромасштабных моделей.

Во второй главе в рамках RANS-подхода представлена микромасштабная метеорологическая модель, для замыкания которой используется «к-ε»-модель турбулентности с нелинейной зависимостью тензора анизотропии турбулентности от тензоров скорости деформации и завихренности или дифференциальная модель напряжений Рейнольдса. В микромасштабной модели учитывается перенос

примеси, влияние городской растительности и движущегося автотранспорта. Подробно рассматривается численный метод решения дифференциальных уравнений, опирающийся на метод конечного объема, неявные разностные схемы, SIMPLE-алгоритм и метод пристенных функций. Для доказательства достоверности используемого подхода проведено тестирование на экспериментальных данных для двумерных и трехмерных течений, соответствующих рассматриваемой проблеме. На основе проведенного параметрического анализа для двумерной модели уличного каньона исследовано влияние геометрических размеров, метеорологических факторов, наличия и размеров массивов растительности и местоположения, а также интенсивности движущегося в уличном каньоне автотранспорта. Показано, что одним из основных факторов, влияющих на загрязненность каньона, является метеорологическая ситуация над городской застройкой. Кроме того, расположение источников выбросов загрязнения на дне каньона также является существенным. Показано, что городская растительность оказывает стабилизирующий эффект на турбулентный поток, т.е. в относительно изолированных областях, таких как уличный каньон, имеет место значительное уменьшение скорости и уровня турбулентности, что, несомненно, сказывается на проветриваемости и процессах, связанных с турбулентным рассеиванием. Учёт эффектов, сопряжённых с передвижением автотранспорта, говорит о том, что движущиеся автомобили способствуют интенсификации процессов перемешивания в объёме городского каньона. Выполнены расчёты пространственных турбулентных вихревых течений вокруг плохообтекаемых прямоугольных препятствий, которые позволили на основе сравнения с экспериментальными и рассчитанными по пакету вычислительной гидродинамики ANSYS Fluent данными выявить слабые и сильные стороны выбранных схем замыкания. Предложена и апробирована методика оценки адекватности микромасштабной модели на основе статистических параметров, полученных расчётным путём и экспериментально. Предложенная микромасштабная модель была применена для расчёта турбулентного течения и переноса примеси для реальных участков городской застройки городов Ганновер и Томск. Результаты численного анализа позволили определить районы уличных каньонов, подверженные наибольшей экологической опасности.

Третья глава посвящена вихреразрешающему (LES) моделированию движения воздуха и переноса примеси в уличных каньонах. В рамках LES-подхода представлена математическая постановка задачи, замыкание отфильтрованных уравнений Навье–Стокса с помощью подсеточной модели Смагоринского или динамической модели Германо. Подробно рассмотрены численный метод решения дифференциальных уравнений и алгоритмы решения сеточных уравнений, подходы к распараллеливанию выбранных вычислительных технологий для вихреразрешающего моделирования. На основе построенной математической модели турбулентного течения несжимаемой среды для трехмерной модели уличного каньона проведен ряд расчетов, результаты которых показывают, что максимальные концентрации примеси наблюдаются у подветренной стороны каньона и вблизи источников примеси. Кроме того, показано, как расположение источника примеси на дне каньона и геометрические параметры исследуемой области влияют на картину течения и распределения примеси. В заключение предложенная микромасштабная математическая модель применена для расчета турбулентного течения и распространения примеси для реального участка городской застройки и на основе численного анализа полученных результатов выявлены зоны повышенной экологической опасности.

1. Аналитический обзор результатов экспериментальных и теоретических исследований аэродинамики и переноса примеси в элементах городской застройки

1.1 Экспериментальные исследования и полевые измерения

Выбросы от автотранспорта являются главным источником загрязнения воздуха в городской среде. Уличные каньоны – это один из наиболее характерных элементов города, где плотность транспортных средств велика, и воздействие вредных веществ, содержащихся в выхлопах автотранспорта, на человеческий организм сильно возрастает. Сценарный анализ и прогноз загрязнения атмосферного воздуха в уличных каньонах позволяют определять неблагоприятные условия образования локально высоких концентраций выхлопов, а также дают возможность при планировании городского рельефа в полной мере учитывать естественную вентиляцию городских кварталов [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]. Последние достижения вычислительной гидродинамики как инструмента для изучения этих процессов являются многообещающими [11,12], однако любая математическая модель требует соответствующей проверки на основе данных наблюдений и экспериментов. Естественно, что экспериментальные исследования в силу своей дороговизны не могут постоянно проводиться для различных конфигураций городской застройки и тем более для отдельного сценария загрязнения, поэтому чаще всего данные наблюдений и эксперименты используются для оценки качества математических моделей. С другой стороны, натурные измерения в уличном каньоне идеальны в том смысле, что наблюдения производятся над реальным объектом, однако недостатком является то, что условия проведения измерений часто не поддаются контролю и корректному описанию в модели, а сами наблюдения дискретны [13,14].

Часто исследования аэродинамики и переноса примеси проводятся в аэродинамических трубах для упрощённой геометрии городской застройки. Так, в работе [15] измерялись турбулентные характеристики потока и статистические характеристики поля концентрации инертной газовой примеси, выбрасываемой из линейного приземного источника, расположенного в уличном каньоне между элементами городской шероховатости. Следует отметить, что модель городской застройки являлась типичной конфигурацией для подобного рода исследований, т.е. массив из элементов в форме кубиков [16,17]. Эксперимент проводился при направлении ветра, перпендикулярном оси моделируемых улиц, а отношение ширины улиц к их высоте равнялось единице. В работе [16] отмечается, что турбулентность, вызванная передвижением автотранспорта, не играет большой роли, тогда как эффект от присутствия самих автотранспортных средств (например, на парковочных местах вдоль дороги) или любого сопоставимого по размерам препятствия заслуживает большего внимания.

Структура потока в условиях высотных зданий существенно отличается от той, что наблюдается, когда высота зданий совпадает с шириной улиц. Исследование в аэродинамической трубе [18], где использовался массив препятствий, моделирующих городскую застройку с соотношением высот к ширине улиц (H/W) от 2 до 5,3, показал быстрое уменьшение скорости ветра внутри массива. В соседних элементах массива препятствий вниз по потоку (около 1–2 км в реальном масштабе) скорость ветра у подветренной стороны препятствий перестаёт уменьшаться из-за интенсивного вертикального перемешивания в рециркуляционных зонах за препятствиями. В работе [18] было также показано, что присутствует сильное сдвиговое течение на верхней границе препятствий, которое порождает трёхмерные вихревые движения воздуха между препятствиями и интенсивное перемешивание вниз по потоку. Изменение высотности препятствий внутри массива может существенно изменять вихревые структуры между препятствиями, такие как нисходящее течение впереди препятствий, которые выше соседних, и восходящие течения за ними. В том случае когда набегающий поток имеет степенной профиль, массив с более высокими препятствиями захватывает

вает больше воздушных масс из окружающего потока, а скорость ветра внутри массива препятствий больше.

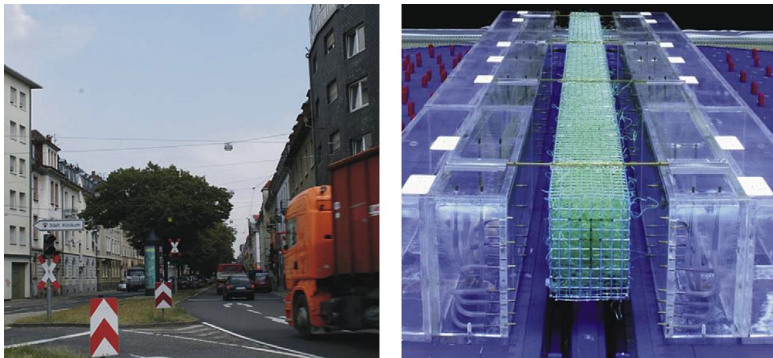


Рисунок 1.1 – Уличный каньон и модель каньона в аэродинамической трубе с решетчатыми контейнерами, наполненными волокнистым материалом [19,20].

В [19] была разработана новая методика моделирования эффектов от растительности для исследования аэродинамики зданий и окружающей среды в аэродинамических трубах, основанная на теории подобия и анализа размерностей [21]. Эта методика даёт возможность на малых масштабах моделировать эффекты от растительности различных типов, например кустарников, отдельно стоящих деревьев и плотных насаждений деревьев, на распространение примеси. Данная методика была протестирована на модели уличного каньона с плотными насаждениями деревьев и линейными источниками примеси вдоль всей длины каньона (рис. 1.1), при направлении ветра, перпендикулярном оси каньона. Эксперимент показал, что деревья в центре каньона создают неблагоприятные условия, мешающие естественной вентиляции каньона, и приводят к накоплению вредных веществ с подветренной стороны каньона. Это происходит из-за того, что кроны деревьев уменьшают размеры вихря, обнаруженного в верхней части каньона, а также степень проникновения чистого воздуха с верхней части каньона [19,20], что приводит к уменьшению вентиляции. Кроме того, было проведено параметрическое исследование влияния пористости кроны на течение возду-

ха, которое показало, что пористость в данном случае не оказывает значительного влияния на течение воздуха и поля концентрации.

Условия стратификации атмосферы также оказывают существенное влияние на поток. В работе [16] исследовались характерные особенности течения (поле ветра, температура, интенсивность турбулентности, турбулентные напряжения и распределение потоков тепла) для устойчивой ($Rb = 0,79$) и неустойчивой ($Rb = -0,21$) атмосферы для идеализированной модели городской застройки в виде массива кубов. Интенсивность рециркуляций, которые наблюдаются в массиве между кубами (кавернах), также как и в реальных уличных каньонах, слабее в условиях устойчивой атмосферы и сильнее в неустойчивом случае. Устойчивая стратификация атмосферы приводит к тому, что течение в уличном каньоне ниже по потоку ослабевает из-за плавучести, что в свою очередь приводит к образованию ещё более устойчиво стратифицированной атмосферы. И как результат, когда устойчивость атмосферы достигает определённого уровня (приблизительно в интервале $Rb = 0,4-0,8$), скорость ветра в аэродинамической трубе в кавернах между кубами (или в уличном каньоне) падает практически до нуля. С другой стороны, когда в атмосфере присутствует неустойчивая стратификация, существует очень интенсивное перемешивание в кавернах (уличных каньонах), приводящее к малому росту и изменению вертикального градиента температур, а следовательно, увеличению неустойчивости атмосферы. Коэффициент Rb определяется из следующего соотношения:

$$Rb = \left(\frac{gh}{U_h^2} \right) \frac{T_h - T_f}{T_a}$$

Здесь h – высота уличного каньона; g – ускорение свободного падения; T_h , U_h – температура и скорость на высоте крыши каньона; T_f – температура на дне каньона; T_a – температура окружающего воздуха.

1.1.1 Наблюдения за полем ветра и концентрацией примеси в уличных каньонах

В основном, измерения в городской застройке показывают образование крупного вихря в центре каньона (рис. 1.2). Данные измере-

ния говорят о том, что даже при условии околостационарного режима течение внутри каньона может быстро изменять свою структуру. Комбинация различных форм крыш зданий и местной топографии могут оказывать влияние на этот эффект, так как сохраняется высокая степень турбулентности даже в условиях относительно низкой скорости ветра [22]. В дополнение к этому перемежаемость иногда приводит к сохранению средней циркуляции, которая, по-видимому, проникает на самый низкий уровень измерений. Иногда в короткие промежутки времени существуют вторичные рециркуляции в нижней части каньона в условиях низкой турбулентности и малой скорости ветра. Результаты натурных измерений показывают, что внутри городского каньона существует высокая степень вертикального перемешивания. В целом поле скорости, динамическая скорость и турбулентная кинетическая энергия являются приблизительно постоянными на высоте от $0,25$ до $0,5H$ (где H – высота каньона) поперёк каньона. При этом во всём объёме уличного каньона перемешивание и турбулентность имеют большую величину рядом с наветренной стороны и стремятся к постоянным значениям с увеличением высоты. К тому же исследователями было обнаружено, что основной фактор, влияющий на картину распространения выхлопов автотранспорта в уличном каньоне, есть конфигурация каньона, т.е. его форма и размер [13,14,22].

Изучение физических моделей городской застройки и уличных каньонов в аэродинамических трубах осуществляется легче, чем исследование в реальных масштабах городских улиц; кроме того, условиями проведения эксперимента можно управлять. Однако неточные граничные условия и уменьшенные масштабы могут приносить ошибки. Так, в экспериментальных работах обнаружено, что при $H_d/H_u = 1$ (H_d – высота здания с наветренной стороны, а H_u – высота здания с подветренной стороны) картина течения сильно зависит от области, которая находится вверх по потоку [23,24,25,26]. То есть если перед первым зданием присутствует свободный набегающий поток, то он оказывает значительное влияние на течение и приводит к его разделению перед каньоном. Следствием этого является малое влияние свободного потока на течение внутри каньона. С другой стороны, если существует совокупность уличных каньонов, то вниз по течению образуются рециркуляцион-

ные области внутри каньонов. Измерения уровней концентрации примеси говорят о том, что при отношении $H_a/H_u = 5/3$ среднее поле концентрации внутри каньона является равномерным, так как в этом случае высокое здание разделяет каньон и область вниз по потоку [24,25,26]. Поэтому чистый воздух не проникает внутрь каньона. Аналогичную картину можно наблюдать и для случая, когда отношение высот зданий уменьшается до 1.

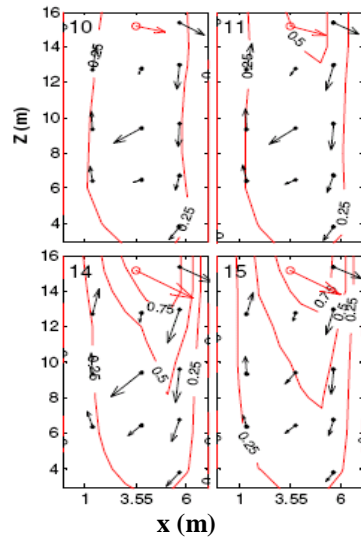


Рисунок 1.2 — Фотография метеорологической мачты и инструментов измерения в каньоне [22] (слева); почасовое среднее поле ветра в уличном каньоне в плоскости Oxz (справа); в верхнем левом углу указывается текущее время (в часах), а контурные линии – это интерполированные значения компоненты вектора скорости V

Очевидно, что из-за ограниченного пространства в существующей городской застройке возможности для увеличения плотности растительности существенно ограничены. Кроме того, неясно, является ли суммарный эффект от увеличения растительности в уличных каньонах позитивным или негативным в отношении качества городского воздуха. Стоит отметить, что результаты натурных наблюдений в уличном каньоне, которые проводились в Окленде, Новая Зе-

ландия, показывают существенное влияние листьев на деревьях на процессы переноса примеси, приводящие к накоплению примеси в каньоне ниже верхней части деревьев [27]. Величина максимумов концентрации примеси меньше внутри растительного покрова, однако значительной разницы между значениями концентрации на разных высотах не наблюдалось. Измерения показывают, что не выявлено существенной разницы в концентрациях примеси с наветренной и подветренной стороны деревьев, когда на них присутствуют листья. Однако наблюдалось относительно небольшое увеличение концентрации примеси с подветренной стороны уличного каньона в отсутствие листьев на деревьях. Результаты наблюдений (рис. 1.3) свидетельствуют о том, что наличие листьев на деревьях уменьшает вертикальный перенос выбросов от автотранспорта, увеличивая накопление выбросов внутри растительности и уменьшая проникновение чистого воздуха с верхней части уличного каньона. Более того, разница в наблюдавшихся концентрациях NO и NO₂ свидетельствует о том, что существуют определённые химические реакции, связанные с наличием листьев на деревьях.

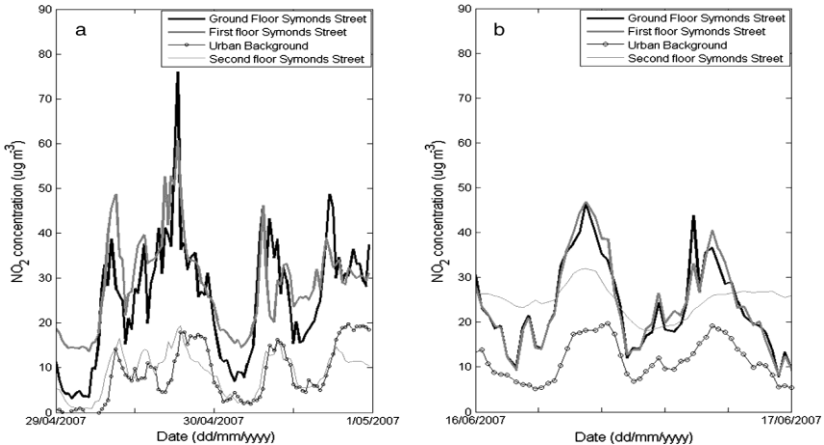


Рисунок 1.3 – Изменение концентрации NO₂ на разных высотах в уличном каньоне в течение двух периодов, когда растительность на деревьях присутствует (a) и отсутствует (b) [27]

Естественно, что посадка деревьев в уличных каньонах имеет как положительные так и отрицательные эффекты, облагораживая городские ландшафты, растительность также приводит к накоплению в городском воздухе (на уровне улиц) мелкодисперсных частиц размером менее 2,5 мк, которые вредны для человеческого здоровья. Таким образом, важно знать влияние деревьев на распространение мелкодисперсных частиц размером менее 2,5 мк, а также оптимальную структуру уличных насаждений, которая способствовала бы минимизации концентрации мелкодисперсных частиц в уличных каньонах. В работе [28] было проведено сезонное исследование для уличных каньонов в шести типичных жилых массивах центральной части Шанхая, в которых часто наблюдается фотохимический смог при том, что в них присутствует большое количество зелёных насаждений. Были проведены измерения мелкодисперсных частиц размером менее 2,5 мк на пяти высотах, а также структуры городских деревьев и погодных условий. Для уличных каньонов, в которых отсутствовали деревья, концентрации мелкодисперсных частиц уменьшались с увеличением высоты (рис. 1.4). Однако присутствие деревьев приводило к тому, что уменьшение концентраций было менее заметным, а в некоторых случаях в верхней части уличных каньонов концентрации даже увеличивались, тем самым показывая, что растительность удерживает мелкодисперсные частицы. Для того чтобы оценить изменение скорости уменьшения мелкодисперсных частиц размером менее 2,5 мк, в [28] был разработан специальный коэффициент затухания. Стоит отметить, что скорость ветра была значительно меньше в уличных каньонах, где присутствовали деревья. Такие параметры, как плотность растительности, индекс листовой поверхности и изменение скорости ветра, оказывали наиболее значительное воздействие на коэффициент затухания. Регрессионный анализ показал, что для того чтобы сбалансировать как экологические, так и ландшафтные преимущества зелёных насаждений, необходимо придерживаться следующих соотношений: для плотности растительности 50–60 % и индекса листовой поверхности 1,5–2,0.

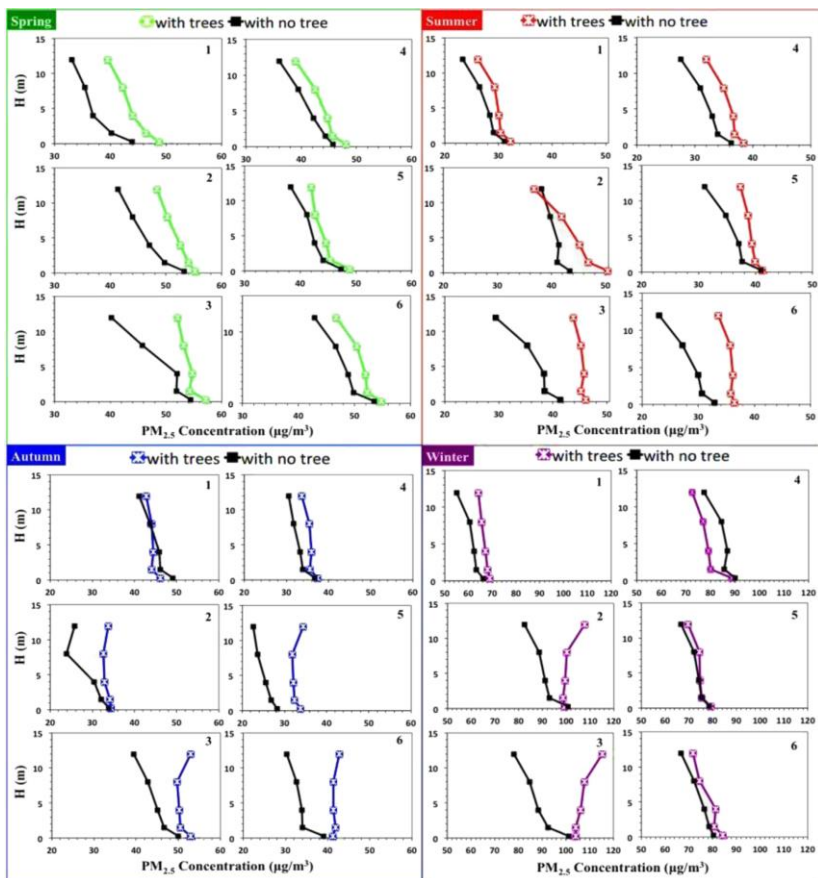


Рисунок 1.4 – Вертикальные профили распределения концентрации мелкодисперсных частиц размером менее 2,5 мк в точках отбора проб воздуха для различных сезонов года [28]; номера 1–6 соответствуют шести типам уличных каньонов в центре Шанхая

Характер течения воздушных масс и картина распределения выхлопов от автотранспорта на перекрёстке дорог имеют более сложную структуру, чем в уличном каньоне. В работе [29] проводились измерения течения воздуха, автотранспортного потока и концентра-

ций оксида углерода (СО) на пересечении улиц (крупной магистрали с двухсторонним движением и меньшей по размерам с односторонним движением) в центре Лондона. Наблюдения на пересечении улиц и в соседних каньонах показали, что режимы течения (рециркуляции и сквозные потоки вдоль оси каньонов) сильно зависят от направления фонового ветра на уровне крыш. Однако на пересечении улиц, где встречаются сквозные потоки вдоль каньонов, структура потока сложнее, а интенсивность турбулентности выше, чем в самих каньонах. Такие характеристики течения воздушных масс вместе с тем фактом, что в данном месте присутствует затор в уличном движении автотранспорта, приводит к наибольшим концентрациям СО на перекрестке за всё время наблюдения. Внутри основного каньона (крупной магистрали) измерения показали наличие спирального режима течения, которое приводит к завышенным концентрациям с подветренной стороны каньона. Данные измерений во всех точках показывают, что даже малые изменения направления фонового ветра могут вызвать большие изменения в направлении среднего поля течения и интенсивности турбулентности внутри каньона, а это означает, что механизмы переноса примеси очень сильно зависят от фонового ветра.

Во время максимальной транспортной нагрузки концентрации примеси в соседних параллельных улицах были приблизительно в четыре раза меньше, чем в основном каньоне и на перекрёстке. В целом, как видно из результатов наблюдений, концентрация примеси может иметь сильную пространственную изменчивость в сложной городской застройке даже на коротких дистанциях, а также что направление и скорость ветра, интенсивность движения автотранспорта и геометрия городской застройки играют важную роль в том, где образуются максимумы концентраций.

1.1.2 Полевые эксперименты и физическое моделирование в массивных элементах городской застройки

К настоящему моменту существует большое количество наборов данных, полученных в результате многодневных измерительных кампаний, проводившихся в городах Северной Америки и Европы

[13,14,30,31], а также данных, полученных в полевых условиях и с помощью физического моделирования городской застройки, используя такие искусственные препятствия, как грузовые контейнеры или кубики в аэродинамических трубах [32,33,34].

В условиях слабого фонового ветра и интенсивной солнечной радиации неравномерный нагрев стен зданий и земной поверхности в городском уличном каньоне может вызвать циркуляции за счёт сил плавучести, которые по интенсивности превосходят циркуляции, вызванные фоновым течением воздушных масс выше уровня крыши. Так, в работе [33] для анализа различных режимов течения в уличном каньоне были использованы два ряда грузовых контейнеров, которые находились под воздействием фонового ветра различной величины, а также естественного дифференцированного нагрева стенок контейнеров. В результате анализа многодневных измерений был получен параметр плавучести, который отражает, какой из режимов циркуляции (термический за счёт эффектов плавучести или инерционный за счёт фонового течения воздушных масс) превалирует в том или ином случае. Этот параметр имеет следующий вид: $B = (g\alpha\Delta TH)/(u_0^2[1 + (H/L)^2])$, где $g\alpha\Delta TH$ – горизонтальная аномалия плавучести, вызванная дифференцированным нагревом стенок каньона; H – высота каньона; L – ширина каньона; u_0 – фоновое значение скорости ветра. Когда $B < B_c$, где $B_c \approx 0,05$ – пороговое значение, тогда преобладает инерционное движение воздушных масс, а скорость движения воздуха в каньоне, нормированная на u_0 , приблизительно постоянная. Когда $B > B_c$, термические эффекты становятся доминирующим фактором, оказывающим влияние на движение воздуха, а при $B \gg B_c$ поток становится не зависимым от фоновых значений скорости ветра. Кроме того, был обнаружен промежуточный режим при $B \approx B_c$, когда нормированная скорость ветра в каньоне зависит как от фонового ветра, так и от плавучести.

Большой массив препятствий с одинаковой геометрией хорошо аппроксимирует морфологию городской подстилающей поверхности. Поэтому в исследовании [32], целью которого было установление основных закономерностей переноса инертной примеси в элементах городской застройки, использовался массив из 120 грузовых контейнеров (12 · 10 контейнеров с приблизительно одинаковыми расстояниями между ними), размещённых в пустыне, каждый из которых имел разме-

ры 12,2 м длиной, 2,42 м шириной и 2,54 м высотой (рис. 1.5). Такая конфигурация воспроизводит шероховатость, сопоставимую с городской, на площади 200 м². А расстояние между контейнерами было выбрано таким образом, чтобы соответствовать режимам турбулентного течения, которые типичны для многих городов Европы и США.

Результаты измерений показывают, что профили осреднённой концентрации инертной примеси вниз по потоку от источника хорошо аппроксимируются гауссовым распределением. Однако вертикальные профили концентрации вниз по потоку имеют намного более сложную структуру, и распределение Гаусса для их описания не подходит. Сравнение картин переноса примеси над подстилающей поверхностью без препятствий и с массивом препятствий показывает, что массив препятствий значительно увеличивает перемешивание и дисперсию примеси в вертикальном и горизонтальном направлениях вниз по потоку и при этом величина средней концентрации на центральной оси переноса примеси меньше. Мелкомасштабная турбулентность высокой интенсивности в массиве препятствий приводит к сильному уменьшению уровня флуктуаций концентрации примеси в сравнении со случаем без препятствий при тех же равных условиях.



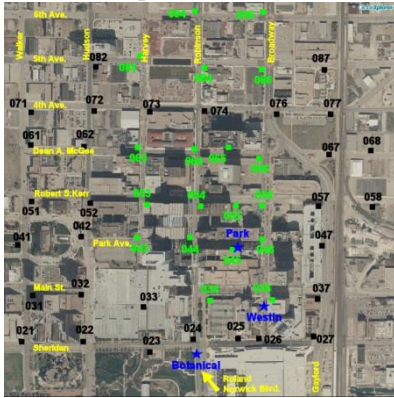
Рисунок 1.5 – Акустический анемометр, размещённый на 6-метровой вышке, и часть участка с массивом контейнеров [35]

Кроме измерительных кампаний с упрощённой геометрией, такой как MUST [32], проводятся и полномасштабные измерения для большей части, а иногда и для целых городов, как те, что проходили в Солт-Лейк-Сити, штат Юта, в октябре 2000 г. Измерительная кампания URBAN 2000 (Atmospheric Dispersion Study in Salt Lake City, USA) [13] была нацелена на изучение атмосферных процессов в условиях устойчивого и нейтрального атмосферных пограничных слоёв. В течение целого месяца было проведено семь интенсивных измерительных кампаний в ночное время, включавших измерения метеорологических условий и переноса инертной примеси, для изучения взаимодействия различных масштабов турбулентного перемешивания в атмосфере, начиная от течений вокруг отдельных зданий и заканчивая городом в целом.

После URBAN 2000 была проведена вторая измерительная кампания URBAN 2003 (Atmospheric Dispersion Study in Oklahoma City, USA) в 2003 г. в г. Оклахома, штат Оклахома [31]. В отличие от URBAN 2000 основной целью кампании было исследование атмосферного переноса при дневных условиях – в нейтральном и конвективном пограничных слоях. Во время измерений в атмосферу выбрасывалась инертная примесь гексафторид серы (SF_6). Измерительные станции располагались в 150 участках в центре города, включая проезжую часть, крыши зданий и пешеходные улицы, а также на расстоянии 1,2 и 4 км от точечного источника (рис. 1.6). Анализ результатов измерений показал, что:

- концентрации примеси на проезжей части превышают те, что на уровне крыш, в 3 раза и более;
- влияние элементов шероховатости на распространение примеси значительнее на уровне улиц, чем на уровне крыш;
- инертная примесь, выпущенная на улице, в случае умеренной ветровой нагрузки быстро распространяется до уровня крыш зданий, которые находятся рядом с местом выброса;
- примесь, выброшенная на уровне улиц, может распространиться вниз по потоку в уличных каньонах приблизительно под углом 60–80 град по отношению к доминирующему фоновому направлению движения воздушных масс на уровне крыш;
- распространение инертной примеси происходит быстрее днём, чем ночью;

- скорость ветра на уровне крыш влияет сильнее на скорость распространения примеси ночью, чем днём;
- измерение уровня турбулентности на уровне улиц может быть полезным индикатором распространения примеси;
- накопление примеси и её распространение в подземных пешеходных переходах происходят по крайней мере на порядок быстрее, чем на открытом воздухе.



а



б

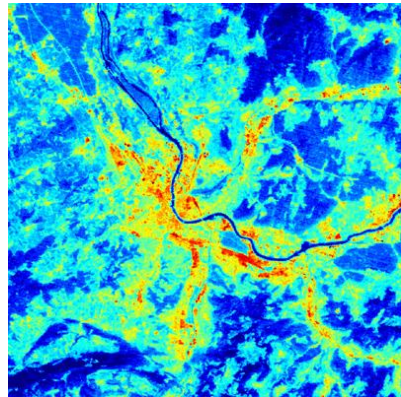
Рисунок 1.6 – Расположение различных устройств для забора проб газа (чёрные и зелёные квадраты), источники инертной примеси (голубые звёзды) в г. Оклахома (а); расположение устройств для забора проб газа на крышах зданий (б) (красные метки)

Морфология городской застройки в США отличается от той, что наблюдается в Европе. Плотность городской застройки намного выше в европейских городах, а также существует существенная разница в высотности зданий. Поэтому характер течения воздушных масс и распространения загрязняющих веществ может существенно отличаться. Так, например, для исследования структуры пограничного слоя над городом Базель, Швейцария, была проведена измерительная кампания длиной целый год [30] под названием BUBBLE (Basel Urban Boundary Layer Experiment). В различных местах города и над различными типами подстилающей поверхности (городской, пригородной и сельской) измерительные мачты высотой, по крайней мере дважды превышающей высоту рядом стоящих препятствий, измеря-

ли атмосферную турбулентность на нескольких уровнях (рис. 1.7, *а*). В дополнение к этому ветровой профилимер и лидар, находившиеся поблизости от центра города, измеряли характеристики всей нижней части тропосферы. Среди всей измерительной кампании выделяется период интенсивных измерений длительностью один месяц, в течение которого были проведены дополнительные замеры турбулентных характеристик потока в уличных каньонах с помощью содаров и аэростатов, а также рассчитаны радиационные и тепловые потоки от города с помощью спутниковых данных (рис. 1.7, *б*). Кроме того, были проведены эксперименты с инертной примесью, которая выбрасывалась на уровне крыш. В дополнение к натурным измерениям была построена модель центральной части городской застройки (Кляйнбазель) в аэродинамической трубе в масштабе 1:300. Результаты измерений в аэродинамической трубе послужили хорошим дополнением и помогли в интерпретации натурных измерений, которые также были проведены в районе Кляйнбазель.



а



б

Рисунок 1.7 – Уличный каньон Sperrstrasse (г. Базель) с метеорологической мачтой высотой 32 м (*а*); спутниковые измерения тепловых потоков от г. Базель (*б*)

В качестве примера использования подобных наборов экспериментальных данных можно привести программу COST 732 (European Cooperation in the field of Scientific and Technical Research, <http://www.mi.uni-hamburg.de/Home.484.0.html>), целью которой явля-

лись улучшение и оценка качества предсказания микромасштабных метеорологических моделей [36,37]. В рамках этого проекта использовались данные измерений – MUST-эксперимент (включает измерения векторного поля скорости, турбулентных параметров и концентрации примеси для различных метеорологических условий), физическое моделирование городской застройки (рис. 1.8), а также эксперименты и результаты наблюдений URBAN 2003 (рис. 1.9).

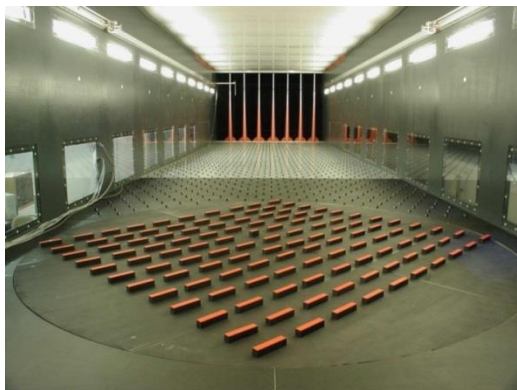


Рисунок 1.8 – Модель массива препятствий MUST эксперимента в аэродинамической трубе [38]



Рисунок 1.9 – Модель городской застройки URBAN 2003 эксперимента в аэродинамической трубе [31]

Кроме того, с 1997 по 2001 г. существовал международный проект TRAPOS (Optimization of Modeling Methods for Traffic Pollution in Streets) [39], цель которого заключалась в улучшении и оптимизации методов математического моделирования загрязнения городского атмосферного воздуха. В рамках этого проекта проводилось множество экспериментов и полевых измерений в Дании, Германии и Америке [25,26,31,40,41,42,43,44]. На основе полученных данных разрабатывались новые модели для оперативного прогноза и различные параметризации для таких тонких эффектов в городской застройке, как влияние турбулентности, генерируемой движущимся автотранспортом, и инсоляции.

1.2 Микромасштабные метеорологические модели для исследования аэродинамики и переноса примеси в приземном слое над городом

Будем предполагать, что турбулентное движение несжимаемой жидкости описывается системой дифференциальных уравнений Навье–Стокса, которая в безразмерном виде запишется следующим образом [45,46]:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0; \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial u_i}{\partial x_i \partial x_i}; \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.2)$$

Здесь $u_i = u_i(\vec{x}, t)$ – компоненты мгновенного поля скорости; p – мгновенное значение давления; Re – число Рейнольдса: $\text{Re} = UL/\nu$; U – характерная скорость потока; L – характерный масштаб; ν – молекулярная кинематическая вязкость. По повторяющимся индексам i проводится суммирование.

Решение системы уравнений (1.1)–(1.2), дополненной соответствующими начальными и граничными условиями, воспроизводит статистические характеристики потока для любых значений Рейнольдса, в том числе и для развитой турбулентности [46,47,48,49,50,51].

В турбулентном потоке содержатся вихри различных масштабов, они взаимодействуют и обмениваются энергией друг с другом, что обусловлено нелинейностью уравнений Навье–Стокса. Крупные вихри турбулентных течений в большей степени ответственны за перенос скалярных характеристик, а их размер L сопоставим с характерными размерами области турбулентного течения [46,52]. Мелкие вихри сопровождают процесс вязкой диссипации и являются столь же важными для правильного описания турбулентного потока, как и крупные. Поэтому при прямом численном моделировании при решении системы уравнений (1.1)–(1.2) необходимо использовать численную модель с достаточной разрешающей способностью для того, чтобы описывать ответственные за диссипацию вихри, масштаб длины которых определяется формулой [53,54]:

$$\eta = \left(\nu^3 / \varepsilon \right)^{1/4}, \quad (1.3)$$

здесь ε – скорость диссипации кинетической энергии турбулентности ($\varepsilon = U^3/L$).

Важно, что вязкость жидкости предотвращает генерацию вихрей бесконечно малых размеров путем рассеяния энергии мелко-масштабных вихрей в молекулярное движение [48], в уравнениях это реализуется за счет диффузионных слагаемых, которые при возрастании числа Рейнольдса сдвигают процесс диссипации в коротковолновую часть спектра энергии турбулентности.

Размеры наибольших и наименьших турбулентных вихрей связаны соотношением

$$(L/\eta) = (UL/\nu)^{3/4} = \text{Re}^{3/4}. \quad (1.4)$$

Это отношение показывает, что масштабы длины мелких вихрей много меньше масштабов крупных вихрей, причем разделение в масштабах растет с увеличением числа Рейнольдса. Схематически передача энергии от крупных энергосодержащих вихрей к мелкомасштабным вихрям в процессе дробления вихрей под действием механизма растяжения [48] показана на рис. 1.10.

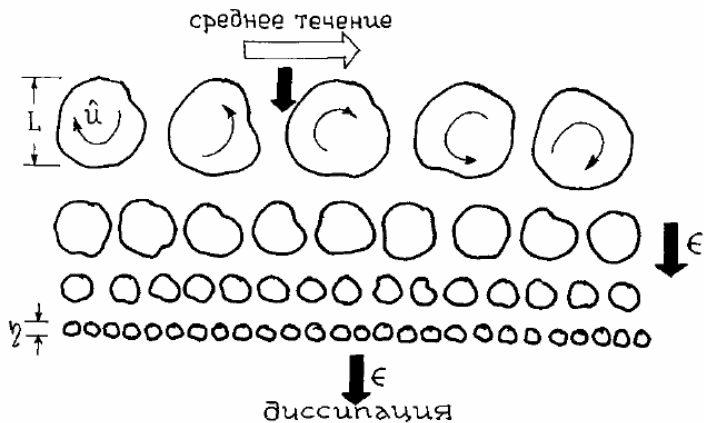


Рисунок 1.10 – Каскадный процесс трансформации энергии турбулентности:

L – линейный масштаб энергосодержащих вихрей;

η – линейный масштаб наименьших вихрей [48]

В теории турбулентности для характеристики энергии вихрей различных масштабов используется спектр энергии турбулентности $E(k)$, где k – волновое число, характеризующее масштаб турбулентности [48]. Схематически распределение спектра кинетической энергии турбулентности представлено на рис. 1.11.

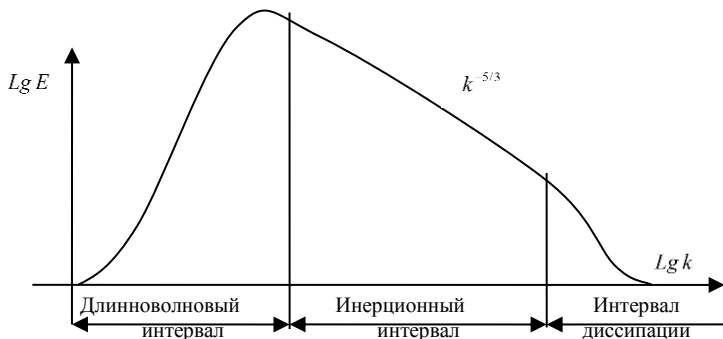


Рисунок 1.11 – Спектр кинетической энергии турбулентности

Согласно предположению Колмогорова, при достаточно больших числах Рейнольдса должен существовать продолжительный промежуточный (инерционный) интервал волновых чисел, в котором энергия не продуцируется и не диссипирует, а только передается по спектру [48,53,54,55]. Для спектра в инерционном интервале справедливо выражение

$$E(k) = c_1 \cdot \varepsilon^{3/2} \cdot k^{-5/3}, \quad L^{-1} \ll k \ll \eta^{-1}, \quad (1.5)$$

которое принято называть законом 5/3 для спектра турбулентности в инерционном интервале [48].

В настоящее время существует три основных и часто используемых подхода моделирования турбулентных течений. Первый подход – это прямое численное моделирование (Direct Numerical Simulation, DNS). Под прямым численным моделированием подразумевается численное решение системы дифференциальных уравнений (1.1)–(1.2), аппроксимированных конечными разностями высокого порядка. DNS обладает тем достоинством, что не требует каких-либо турбулентных замыканий, а результаты, полученные при моделировании, используются подобно экспериментальным данным. Прямое численное моделирование пригодно для исследования внутренних механизмов турбулентности и может выступать как инструмент для детального изучения мелкомасштабной турбулентности [48,52,56]. Недостатками прямого численного моделирования являются сложность выбора начальных условий и высокая стоимость проведения расчётов на ЭВМ, т.е. необходимо использовать суперкомпьютеры с массовым параллелизмом, время счета на которых исчисляется десятками часов, а расчёты ограничены течениями при относительно низких числах Рейнольдса.

Один из наиболее дорогих с точки зрения вычислительных затрат расчетов турбулентного потока в канале потребовал приблизительно 120 сут непрерывного счета на 2 048 процессорах массивно-параллельного компьютера, описание условий численного эксперимента можно найти в работе [57].

Такая высокая затратность прямого численного моделирования является результатом сложной природы турбулентности, поскольку для того чтобы точно предсказывать турбулентную структуру течения, необходимо моделировать практически весь спектр масштабов

турбулентности Колмогорова [48,52,54,58,59]. Поэтому маловероятно, что прямое численное моделирование в самом ближайшем будущем будет регулярно применяться в инженерных расчетах для расчета течений с большими числами Рейнольдса.

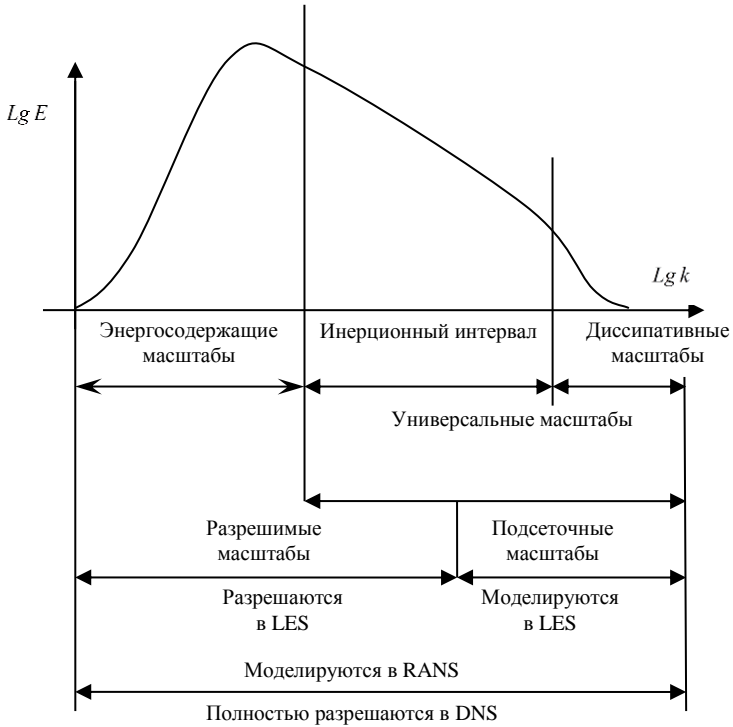


Рисунок 1.12 – Спектр кинетической энергии турбулентности и трактовка различных подходов к моделированию турбулентности

Второй подход – моделирование крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES) – использует более грубую сетку по сравнению с предыдущей методикой. Он основан на концепции «фильтрация» турбулентности. Так как посредством грубой сетки нельзя напрямую рассчитывать наименьшие масштабы турбулентности, то используются модели движений подсеточных масштабов для учета

мелкомасштабной диссипации энергии турбулентности и обратного рассеяния энергии потока от малых к большим масштабам [48,50,52,55]. Вместе с этим крупномасштабные турбулентные движения рассчитываются явно и не требуют моделирования (рис. 1.12). Этот метод более точен в сравнении с подходом, основанным на использовании осреднённых по времени уравнений Навье–Стокса, в котором моделируется одновременно весь спектр масштабов турбулентности. Впервые этот подход был использован в 1970 г. Дирдорфом для моделирования турбулентного течения в канале [60], а затем для моделирования атмосферного пограничного слоя [61].

Относительно высокая расчетная стоимость все еще ограничивает применение вихреразрешающих моделей для предсказания разномасштабных процессов в окружающей среде. Поэтому в рамках этого подхода существует острая необходимость создания высокопроизводительных программ для решения уравнений Навье–Стокса с привлечением суперкомпьютеров. Неоспоримым достоинством LES-моделей является способность предсказывать нестационарную турбулентную структуру течения и различные турбулентные корреляции, поэтому иногда для получения такой информации данный подход применяют при моделировании сложного турбулентного движения воздушных масс, например в уличном каньоне [62].

Третий подход моделирования турбулентности базируется на осреднённых по времени уравнениях Навье–Стокса (Reynolds-Averaged Navier–Stokes, RANS). Здесь турбулентное течение рассматривается как сумма двух компонент: осреднённой части и пульсационной [46,48,63,64]. Среднее течение рассчитывается с использованием осреднённых уравнений Навье–Стокса, которые включают дополнительные нелинейные члены, содержащие напряжения Рейнольдса $\overline{u'_i u'_j}$ (u'_i – это пульсация скорости, а черта сверху обозначает осреднение Рейнольдса). Для неизвестных напряжений Рейнольдса также может быть выведено транспортное уравнение, однако оно будет включать дополнительные неизвестные третьего порядка $\overline{u'_i u'_j u'_k}$ и т.д. Эта задача определения напряжений известна в моделировании турбулентности как «проблема замыкания». Существуют различные модели турбулентности, которые аппроксимиру-

ют $\overline{u_i u_j}$, начиная от простых алгебраических соотношений и заканчивая теми, которые включают дополнительные транспортные уравнения для каждой из пяти независимых компонент тензора напряжений Рейнольдса. Данный подход моделирования турбулентности требует значительно меньше вычислительных ресурсов компьютера по сравнению с двумя предыдущими.

Хотя в изложенном выше материале все подходы моделирования турбулентности были для простоты разбиты на три категории, на самом деле существует множество гибридных методов, в которых, для примера, у твёрдых стенок используются нестационарные осреднённые по времени уравнения Навье–Стокса, а в основном потоке расчёты осуществляются по вихреразрешающей модели. Обсуждение этих гибридных методов (Detached Eddy Simulation (DES), Very Large Eddy Simulation (VLES) и Unsteady RANS (URANS)) приводится в работе [65].

Следует отметить, что численное решение системы уравнений Навье–Стокса, полученное с использованием LES-подхода моделирования турбулентности, содержит более богатую информацию по сравнению с решением на основе уравнений Рейнольдса. При этом имеющиеся оценки указывают на то, что количество узлов, необходимое для проведения расчетов с использованием LES, составляет около 5 % количества узлов, используемых в DNS [66]. Таким образом, с имеющимися ограничениями на используемую вычислительную технику в LES можно добиться больших результатов, чем при использовании DNS. При этом можно получить не только характеристики среднего течения (поля скорости, концентрации, температуры, давления), но и спектральные характеристики (спектры пульсаций скорости и давления), а также временные и пространственные масштабы турбулентности. Многие из этих характеристик имеют важное значение для инженерных приложений.

1.2.1 Простые полуэмпирические модели переноса примеси в уличных каньонах

Осреднённые по времени уравнения Навье–Стокса, называемые уравнениями Рейнольдса, в декартовой системе координат выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0; \quad (1.6)$$

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} + \rho \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij} + \tau_{ij}^*), \quad (1.7)$$

$$j = 1, 2, 3;$$

где $\tau_{ij} = 2\mu \bar{S}_{ij}$, $\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$, $\tau_{ij}^* = -\rho \overline{u'_i u'_j}$, $i, j = 1, 2, 3$, а \bar{u}_i – проекции вектора скорости на координатные оси Ox_i ; x_i – координаты; ρ – плотность; t – время; \bar{p} – давление; μ – молекулярная динамическая вязкость; τ_{ij} – тензор напряжений; τ_{ij}^* – тензор турбулентных напряжений; \bar{S}_{ij} – тензор скорости деформации.

Осреднённое уравнение переноса энергии (концентрации) имеет вид

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i} (q_i - q_i^*), \quad (1.8)$$

где $q_i = -\alpha \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x_i}$, $q_i^* = -\overline{u'_i \Phi'}$, $i = 1, 2, 3$, α – коэффициент молекулярной диффузии величины $\bar{\Phi}$; q_i^* – турбулентный тепловой (концентрационный) поток, а $\bar{\Phi}$ – это осреднённая энергия или концентрация.

Тензор напряжений Рейнольдса и турбулентные потоки тепла или концентрации являются дополнительными неизвестными. Поэтому необходимо добавлять соотношения (уравнения) для расчёта этих величин.

В XIX в. Буссинеск предложил решение проблемы замыкания уравнений турбулентного движения, полагая, что турбулентные напряжения пропорциональны скорости деформации, включая вихревую вязкость в качестве коэффициента пропорциональности [46]:

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad (1.9)$$

где k – кинетическая энергия турбулентности; ν_T – турбулентная вязкость.

Один из наиболее распространенных классов моделей турбулентности в настоящее время – это двухпараметрические модели, которые включают транспортные уравнения для двух турбулентных параметров (обычно турбулентная кинетическая энергия и вторая не зависящая от неё переменная). Существует большое количество двухпараметрических моделей, которые в качестве второго независимого параметра используют разнообразные величины (например, скорость диссипации энергии турбулентности ε , произведение кинетической энергии на масштаб турбулентности kl , частоту турбулентных пульсаций ω и т.п.). Наиболее популярная схема замыкания за последние 20 лет – это «к- ε »-модель. В этой двухпараметрической модели [67,68] вихревая вязкость рассчитывается из соотношения

$$\nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (1.10)$$

где C_μ является коэффициентом пропорциональности, который обычно определяется эмпирическим путём. Величина ε является скоростью диссипации турбулентной кинетической энергии в единице массы, которая появляется в k -уравнении как сток. Скорость диссипации с физической точки зрения может рассматриваться как скорость, с которой турбулентная кинетическая энергия переносится от крупномасштабного вихревого движения к малым масштабам. Точное транспортное уравнение для ε получается из определения скорости диссипации $\varepsilon = \nu \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}$, но при этом уравнение содержит много неизвестных членов, включая двойные и тройные корреляции пульсаций скорости, градиента давления и скорости [69]. Поэтому вывод уравнения для ε основывался больше на эмпирических и интуитивных размышлениях согласно работам Чоу [70], Давыдова [71] и Харлоу и Накаяма [72]. Тем не менее были получены достаточно точные решения при использовании этой модели для широкого спектра течений от потоков в инженерных устройствах до течений в окружающей среде.

Другая популярная двухпараметрическая модель включает уравнение для частоты турбулентности ω или, точнее, скорости диссипации на единицу кинетической энергии турбулентности как второй

параметр. Этот подход впервые был предложен Колмогоровым [54], а позднее основным сторонником «k-w»-подхода стал Уилкоккс. В своей книге [73] Уилкоккс обсуждает характеристики моделей «k-ε» и «k-w» по отношению к свободным сдвиговым течениям, пограничным слоям и отрывным течениям, говоря о том, что «k-w»-модель работает лучше в двумерных пограничных слоях с различными градиентами давления и в рециркуляционных течениях, однако в значительной мере чувствительна к граничным условиям в свободном потоке для сдвиговых течений.

Хотя двухпараметрические модели относительно просты при численной реализации и часто дают удовлетворительные результаты моделирования, тем не менее они имеют ряд ограничений. В простых сдвиговых течениях, где скорость имеет зависимость $U=U(y)$, нормальные напряжения Рейнольдса по модели вихревой вязкости являются изотропными (т.е. $\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2} = 2k/3$), в то время как эксперименты и прямое численное моделирование [74] показывают, что существует анизотропия нормальных напряжений: $0,5\overline{u'^2} \approx \overline{v'^2} \approx \overline{w'^2}$. Этот недостаток может и не влиять на корректное предсказание динамики в простом сдвиговом течении. Однако в работе [75] показано, что правильное описание анизотропии нормальных напряжений является существенным при моделировании вторичных течений. Двухпараметрические модели, в которых порождение турбулентной кинетической энергии пропорционально квадрату тензора скорости деформации ($P_k \sim S^2$), завышают уровень кинетической энергии турбулентности вблизи застойных зон и поэтому предсказывают более высокие скорости переноса тепла (концентрации), чем фиксируются в экспериментах. В дополнение ко всему модели вихревой вязкости (1.10) описывают вариацию угловой скорости как линейно зависимую от радиуса в полностью развитом закрученном потоке в трубе, хотя эксперименты [76] говорят о том, что этот профиль нелинейный. А асимметричный профиль скорости, который наблюдается в полностью развитом искривленном канале, не может быть смоделирован с помощью модели вихревой вязкости (1.10) без соответствующих корректировок для кривизны линий тока [77]. Естественно, что все эти недостатки двухпараметрических моделей могут повлиять на предсказание аэродинамики и распространения

примеси в массиве зданий из-за сложности течения, присутствия многочисленных рециркуляций потока и застойных зон.

Несмотря на это, кроме инженерных приложений двухпараметрические модели широко применяются для расчётов течений воздушных масс в городской застройке. Например, нестационарные уравнения Рейнольдса и «к-ε»-модель турбулентности использовались в работе [78] для определения турбулентной структуры течения в городском уличном каньоне. Однако некоторые атмосферные явления не могут быть корректно смоделированы двухпараметрическими моделями, и поэтому требуются модификации определённых констант, к примеру, в случае устойчиво стратифицированных атмосферных пограничных слоёв [79].

В настоящее время группа европейских учёных, работавших в том числе по проекту TRAPOS, создала ряд микромасштабных моделей, таких как CHENSI-1, CHENSI-2, MIMO, MISKAM, TASCflow, для расчёта распространения выхлопов от автотранспорта [43]. В качестве основных уравнений во всех этих моделях используются нестационарные уравнения Рейнольдса для представления осреднённого турбулентного движения. Для их замыкания применяется «к-ε» (или «к-w») модель турбулентности, а также их различные модификации с использованием алгебраических соотношений для напряжений Рейнольдса. В качестве транспортного уравнения для описания дисперсии примеси служит уравнение конвекции-диффузии. С помощью этих моделей можно исследовать распространение загрязнения как в отдельно взятом уличном каньоне, так и в целых жилых массивах.

Наиболее сложные дифференциальные модели для турбулентных напряжений помогают преодолевать трудности, связанные с моделированием анизотропии нормальных напряжений, и другие недостатки двухпараметрических моделей. Эти модели включают дифференциальные транспортные уравнения для каждой независимой компоненты тензора напряжений Рейнольдса. Уравнения переноса имеют следующий вид:

$$\frac{Du'_i u'_j}{Dt} = P_{ij} + d_{ij} + \varepsilon_{ij} + \phi_{ij}, \quad (1.11)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

где в правой части уравнения члены представляют соответственно: порождение P_{ij} , диффузию d_{ij} , диссипацию ε_{ij} и перераспределение за счёт давления ϕ_{ij} . Член производства P_{ij} не требует моделирования и рассчитывается точно. Слагаемое, связанное с корреляцией давления и скоростью деформации ϕ_{ij} , описывает перераспределение энергии между нормальными напряжениями и моделирует сток для сдвиговых напряжений. Из-за того, что тензор ϕ_{ij} имеет след, равный нулю, он не появляется в уравнении для кинетической энергии, которое используется в двухпараметрических моделях турбулентности. В дополнение к способности учитывать кривизну течения и анизотропию напряжений Рейнольдса дифференциальная модель для турбулентных напряжений способна предсказывать изменение моментов второго порядка со временем, что является важным в течениях с быстрой динамикой характеристик потока. Например, в первоначально анизотропном турбулентном поле течения, для которого характерно внезапное изменение скорости деформации (обращение в нуль), двухпараметрическая модель предсказывает внезапный возврат к изотропии, в то время как эксперименты (и дифференциальная модель для напряжений) моделируют это изменение постепенно. Обзор современных дифференциальных моделей для напряжений Рейнольдса представлен в работе [73]. Несмотря на многочисленные достоинства, эти модели требуют больших расчётных затрат, а для трёхмерных задач необходимо решение одиннадцати транспортных уравнений. Более того, в силу нелинейности они сложны при численной реализации, а расчёты могут сопровождаться численной неустойчивостью.

Модели нелинейной зависимости тензора анизотропии от компонент тензора скорости деформации и завихренности разрабатывались в качестве компромисса между простыми схемами замыкания (1.10) и более точными, но дорогостоящими дифференциальными моделями для напряжений. В таких моделях напряжения Рейнольдса рассчитываются из алгебраических соотношений, которые включают линейные, квадратичные и иногда члены более высокого порядка, содержащие комбинации тензоров скорости деформации (S) и завихренности (Ω). В настоящее время существует ряд подходов при разработке подобных моделей. Первая методика сводится

к упрощению уравнений дифференциальной модели для напряжений Рейнольдса, используя квазиравновесное приближение [73,80,81]:

$$\frac{D\overline{u'_i u'_j}}{Dt} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} \frac{Dk}{Dt} + k \underbrace{\frac{D}{Dt} \left(\frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} \right)}_{}, \quad (1.12)$$

где D/Dt – обозначение, которое объединяет нестационарную производную и конвективно-диффузионный оператор, а последний член в правой части предполагается равным нулю. Это приводит к неявной алгебраической модели для напряжений Рейнольдса, в которой корреляционные моменты второго порядка появляются в обеих частях уравнений, включая нелинейные функции скорости деформации S и завихренности Ω . Для получения явных выражений (в виде $\overline{u'_i u'_j} = f(S, \Omega)$) используются различные методы, которые изложены в работах [82,83]. Альтернативный и более практичный подход при разработке моделей такого класса заключается в том, чтобы просто вводить комбинации высоких порядков тензоров S и Ω в модель вихревой вязкости, а затем подбирать константы для широкого спектра течений, другими словами, тензор анизотропии напряжений Рейнольдса представляется в виде линейной комбинации базисных тензоров

$$a_{ij} = \overline{u'_i u'_j} / k - 2/3 \delta_{ij} = \sum_{n=1}^N \alpha_n T_{ij}^{(n)}, \quad (1.13)$$

где $T_{ij}^{(n)}$ ($n = 1, \dots, N$) – тензорный базис с конечным N , элементами которого являются комбинации компонентов S и Ω , а коэффициенты α_n определяются в соответствии с выбранным базисом.

Этот подход был обоснован и формализован в работе [84] и использовался другими исследователями [85,86]. Квадратичные комбинации S и Ω необходимы в таких моделях для учёта анизотропии напряжений Рейнольдса, в то время как эффекты закрутки течения и кривизны линий тока моделируются только кубическими членами [85]. Некоторые модели включают дополнительные условия реализуемости, например квадратичная модель в работе [86] обеспечивает неотрицательность кинетической энергии турбулентности. В общем случае модели вихревой вязкости (1.13), как и обычные двухпараметрические, включают транспортные уравнения для двух (или трёх) турбулентных параметров

и с точки зрения расчётной стоимости несколько более затратные, чем стандартные двухпараметрические модели. В то же время их компьютерная реализация много легче, чем дифференциальных моделей для напряжений Рейнольдса. Модели для a_{ij} также не способны точно учитывать эффекты, связанные с нестационарностью (так как конвекция и диффузия отдельных напряжений Рейнольдса не моделируются), но тем не менее эти модели проявили себя очень хорошо при предсказании сложных турбулентных течений [85,86].

В последнее время появились микромасштабные модели аэродинамики в городской застройке [87,88], которые основаны на двухпараметрических моделях с нелинейной зависимостью для a_{ij} . Использование таких моделей позволяет повысить точность расчёта течений и переноса примеси, однако вместе с этим на 15–20 % увеличивается и расчётное время в сравнении с обычными моделями вихревой вязкости (1.13).

В заключение можно отметить, что различные модели турбулентности, основанные на осреднении Рейнольдса, можно комбинировать для создания двухслойных или зональных схем замыкания. Обычно двухпараметрические модели или модели более высокого порядка используются в основной части течения, в то время как пристенная область моделируется с помощью простых, обычно алгебраических моделей или моделей с одним уравнением (для малых чисел Рейнольдса). Двухслойный подход позволяет сэкономить расчётное время в сравнении с подходом, связанным с интегрированием моделей высокого порядка во всей пристеночной области, но существует проблема связывания двух слоёв в сложных течениях и, кроме того, результаты зависят от расположения границы [73].

1.2.2 Микромасштабные модели аэродинамики и переноса примеси, использующие RANS-подход

1.2.2.1 Основные уравнения и моделирование турбулентности

Задание граничных условий вблизи твёрдой стенки требует особого внимания при моделировании турбулентных течений. В отдалении от стенки обычно пренебрегают вязкими напряжениями, од-

нако при приближении к стенке турбулентные сдвиговые напряжения ослабевают, а вязкие начинают доминировать. Это приводит к сильным градиентам скорости, напряжений Рейнольдса и других величин, таких как k и ε .

При использовании прямого численного моделирования и вихререзающих моделей проблема предсказания пристеночной турбулентности не возникает, так как разрешение сетки достаточно велико для того, чтобы описывать области высоких градиентов.

Дифференциальные модели переноса турбулентных напряжений и модели вихревой вязкости, в которых осреднённые уравнения Навье–Стокса и уравнения для турбулентных параметров вычисляются прямо от стенки, называются моделями для низких чисел Рейнольдса. Примерами таких моделей могут быть: « k - ε »-модель Лаундера и Шарма [77] с дополнительными членами для учёта влияния вязкости в уравнениях Рейнольдса и уравнениях для турбулентных характеристик, « k - w »-модель Уилкокса [89] и одна из последних – трёхпараметрическая кубическая « k - ε - A_2 » нелинейная модель [90], которая содержит дополнительное уравнение переноса для второго инварианта тензора анизотропии $A_2 = a_{ij}a_{ji}$ с целью улучшения учёта влияния пристеночных эффектов.

Пристенный пограничный слой состоит из вязкого (ламинарного) подслоя, логарифмической зоны, где изменение поля скорости описывается логарифмическим профилем, и буферной зоны, которая является промежуточной между этими двумя слоями [46,48]. Потенциальная проблема состоит в том, что размеры пограничного слоя обратно пропорциональны степенной функции от числа Рейнольдса потока. Таким образом, при высокой скорости пограничный слой становится тонким, следовательно, для того чтобы рассчитать течение, необходимы мелкие расчётные ячейки в пристеночной области. Это может приводить к вычислительной численной жёсткости и большим вычислительным затратам, особенно при трёхмерных расчётах [73]. Вместо того чтобы рассчитывать течение прямо от стенки, иногда используют зональные модели, суть которых состоит в решении дифференциального уравнения для одного турбулентного параметра в пограничном слое и определении турбулентного масштаба потока из геометрических соображений.

Альтернативный подход заключается в использовании моделей для высоких чисел Рейнольдса и пристеночных функций для связывания решения между стенкой и полностью развитым турбулентным ядром течения. В конце 60-х – начале 70-х гг. прошлого века Лаундер и Сполдинг [69] предложили методику, которая стала популярной для учёта влияния обтекаемых поверхностей на структуру потока. Суть её заключается в том, что первый расчётный узел помещается в логарифмической зоне, в полностью развитом турбулентном течении на расстояние от стенки $30 < y^+ < 300$, где безразмерная координата $y^+ = u_\tau y / \nu$, а динамическая скорость $u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$. Для определения напряжения трения τ_w используются локально-равновесные условия (т.е. равенство порождения кинетической энергии и её диссипации) и логарифмический закон для скорости

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(E_1 y^+), \quad (1.14)$$

(где E_1 и κ – постоянные величины, а $u^+ = u / u_\tau$ – безразмерная скорость). Далее эти полученные значения напряжения трения τ_w используются в качестве источника в уравнении движения для учёта влияния силы трения на стенке. Так как подход с пристеночными функциями обычно применяется в включающих транспортные уравнения для турбулентных характеристик моделях, то необходимо определять средние значения для порождения кинетической энергии (\bar{P}) и диссипации ($\bar{\epsilon}$) в пристеночной ячейке. Величина \bar{P} определяется в предположении, что турбулентные сдвиговые напряжения остаются постоянными в пристенной расчётной ячейке, а значение $\bar{\epsilon}$ рассчитывается в пристеночном узле как средняя величина.

Ченг и Лаундер [91] попытались модифицировать метод пристенных функций Лаундера–Сполдинга с целью повышения качества расчёта. Они предположили, что турбулентные сдвиговые напряжения меняются в пристеночной ячейке. То есть обращаются в нуль в части ячейки, которая находится в вязком подслое, и линейно изменяются в оставшейся области расчётной ячейки, которая охватывает полностью турбулентный поток. Кроме того, Ченг и Лаундер проводили расчёты напряжений трения на стенке, взяв за основу турбулентную кинетическую энергию на границе вязкого подслоя k_v , а не в пристеночном узле и определяя размеры вязкого под-

слоя y_v через число Рейнольдса $R_v = k_v^{1/2} y_v / \nu = 20$. Тем не менее Джонсон и Лаундер [92] отмечали, что существует несколько классов течений, для которых предположение о постоянстве R_v не справедливо, например, в присоединённых течениях, т.е. течениях, в которых оторвавшийся с поверхности поток вновь присоединяется к ней. Для описания таких случаев Джонсон и Лаундер вывели функциональную форму для числа Рейнольдса в подслое $R_v = f(k_v, k_w)$, где k_w – экстраполированная величина турбулентной кинетической энергии от пристенного расчётного узла и соседнего с ним.

Проблема всех методов пристенных функций заключается в том, что они опираются на предположение о логарифмическом профиле скорости и о постоянном либо линейном распределении турбулентных сдвиговых напряжений вблизи стенки. При этом не учитывается влияние градиентов давления, конвективного переноса или массовых сил. Следовательно, развивающиеся течения, течения с обратным или положительным градиентом давления и существенно неизотермические потоки, магнитогидродинамические воздействия будут воспроизводиться не совсем корректно. Несмотря на вышеизложенные недостатки, этот подход широко используется в различных областях, в том числе и в предсказании городской аэродинамики, позволяя получать вполне удовлетворительные результаты.

1.2.2.2 Параметризация влияния городской растительности

Течение воздушных масс внутри и над растительным покровом является существенно трёхмерным, так как геометрия элементов растительного слоя имеет очень сложную структуру и растительность оказывает на поток не только механическое, но и термическое воздействие. Несмотря на это, чаще всего в экспериментальных и теоретических исследованиях процессов в растительности используется одномерный подход, а операция пространственного (объёмного) осреднения задаётся неявным образом [93,94,95,96,97,98]. При этом объёмное осреднение является важным, так как оно позволяет моделировать различные трёхмерные эффекты даже в рамках одномерного подхода: аэродинамическое сопротивление, вязкостное сопротивление, а также возникновение турбулентного следа в масштабах, сопостави-

мых с размерами элементов растительного покрова. Уилсон и Шоу [98] отмечали, что последний из этих эффектов корректно описывается традиционным подходом – дополнительным членом аэродинамического сопротивления в уравнении Навье–Стокса. Этот источник диссипирует турбулентную кинетическую энергию внутри растительного покрова, а воздействие аэродинамического сопротивления заключается в превращении средней кинетической энергии набегающего потока и крупномасштабной турбулентной кинетической энергии в кинетическую энергию в масштабах элементов растительности [94,99]. Уилсон и Шоу предполагали, что все эти эффекты могут быть корректно с математической точки зрения параметризованы без помощи дополнительных эмпирических членов только путём горизонтального осреднения уравнений сохранения.

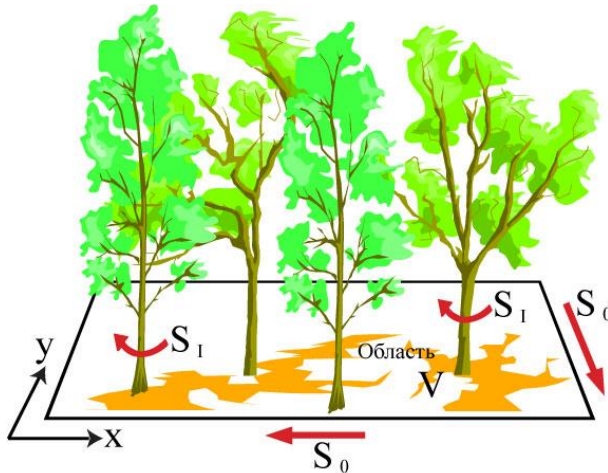


Рисунок 1.13 – Область растительного покрова V

К настоящему моменту разработана наиболее общая формулировка осреднения в растительности – осреднение по объёму [94,100]. Осредненная по объёму любая скалярная величина $\langle \Phi \rangle(\mathbf{x}, t)$ или компонента вектора $\langle \Phi \rangle(\mathbf{x}, t)$ в положении \mathbf{x} и времени t задаётся в виде

$$\langle \Phi \rangle(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V} \iiint_V \Phi(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) dr, \quad (1.15)$$

где объём V , из которого исключены все элементы растительности, должен быть достаточно велик, чтобы исключить изменения в структуре растительного покрова вдоль горизонтальных координатных направлений, но достаточно мал в вертикальном направлении z , чтобы сохранить характерное изменение свойств по вертикали. Перед применением операции (1.15) к уравнениям сохранения все переменные течения Φ должны быть разбиты на их осредненные по объёму и пульсационные составляющие:

$$\Phi = \langle \Phi \rangle + \Phi'', \text{ где } \langle \Phi''(x, t) \rangle = 0. \quad (1.16)$$

В многосвязных областях (воздух и растительность), дифференцирование и объёмное осреднение не коммутируют для величин, которые не постоянны на границах раздела воздух–элементы растительности (рис. 1.13). Это также верно и для производных по времени. Кроме того, можно показать, что

$$\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial \langle \Phi \rangle}{\partial x_i} - \frac{1}{V} \iint_{S_I} \Phi n_i dS; \quad (1.17)$$

$$\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \Phi \rangle}{\partial t} + \frac{1}{V} \iint_{S_I} \Phi v_i n_i dS, \quad (1.18)$$

где S_I – часть поверхности, ограничивающей объём V , которая совпадает с поверхностью элементов растительности; n_i – единичный вектор внешней нормали к элементу S_I в V , а v_i – скорость поверхностей растений. Предполагаем, что внешняя часть объёма V фиксирована в пространстве. Используя подход Рейнольдса [46], все переменные течения разбиваются на среднюю составляющую и пульсационную:

$$\Phi = \bar{\Phi} + \Phi', \bar{\Phi} = \langle \bar{\Phi} \rangle + \bar{\Phi}'', \quad (1.19)$$

где $\langle \bar{\Phi}'' \rangle = 0$.

Применяя объёмное осреднение к осреднённым по времени уравнениям сохранения массы и Рейнольдса, получаем

$$\frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle}{\partial x_i} = 0, \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle}{\partial t} + \langle \bar{u}_j \rangle \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \bar{p} \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_{Fi} + f_{Vi}, \quad (1.21)$$

где

$$\tau_{ij} = -\langle \bar{u}'_i \bar{u}'_j \rangle - \langle \bar{u}''_i \bar{u}''_j \rangle + \nu \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle}{\partial x_j}, \quad (1.22)$$

$$f_{Fi} = \frac{1}{V} \iint_{S_i} \bar{p} n_i dS, \quad (1.23)$$

$$f_{Vi} = -\frac{\nu}{V} \iint_{S_i} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial n} dS, \quad (1.24)$$

где ρ и ν – плотность и кинематическая вязкость воздуха соответственно. Осреднённый по объёму тензор τ_{ij} включает как обычные турбулентные и молекулярные напряжения [первый и третий члены в (1.22)], так и рассеивающий член [98]. Его появление обусловлено пространственными корреляциями в осредненном по времени поле скорости, которые возникают в результате горизонтальной гетерогенности покрова. Присутствие членов f_{Fi} и f_{Vi} является прямым следствием некоммутирования операторов дифференцирования и объёмного осреднения; f_{Fi} и f_{Vi} – силы аэродинамического и вязкостного сопротивления соответственно, возникающие в результате воздействия элементов растительности на единицу массы воздуха в объёме V . На основе экспериментальных данных [98,99], предполагается, что для однородного растительного покрова вклад рассеивающего члена в τ_{ij} пренебрежимо мал по сравнению с осреднёнными по объёму напряжениями Рейнольдса.

Силы аэродинамического и вязкостного сопротивления моделируются на основе соотношения

$$f_{Fi} + f_{Vi} = f_i = -C_d A(x_3) \langle \bar{u}_i \rangle |\langle \bar{u}_i \rangle|, \quad (1.25)$$

где $A(x_3)$ – двухсторонняя площадь листвы в единице объёма пространства, а C_d – коэффициент сопротивления.

Оператор объёмного осреднения можно также применить и к дифференциальному уравнению для вторых моментов.

После осреднения по времени уравнения для напряжений Рейнольдса имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} &= -\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} - \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} - \\
&- \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u'_i u'_j u'_k} + \frac{1}{\rho} \left(\overline{p' \delta_{kj} u'_i} + \overline{p' \delta_{ik} u'_j} \right) \right) + \\
&+ \frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_i} \right) - 2\nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_k} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k^2}.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Далее, разбивая переменные в уравнении (1.26) согласно соотношению (1.16) и осредняя (1.26) по пространству, в итоге получаем:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{\partial \langle \overline{u'_i u'_j} \rangle}{\partial t}}_I + \underbrace{\langle \overline{u_k} \rangle \frac{\partial \langle \overline{u'_i u'_j} \rangle}{\partial x_k}}_{II} &= - \underbrace{\left(\langle \overline{u'_i u'_k} \rangle \frac{\partial \langle \overline{u_j} \rangle}{\partial x_k} + \langle \overline{u'_j u'_k} \rangle \frac{\partial \langle \overline{u_i} \rangle}{\partial x_k} \right)}_{III} - \\
&- \underbrace{\frac{\partial \langle \overline{u'_k u'_i u'_j} \rangle}{\partial x_k}}_{IV} - \underbrace{\left(\langle \overline{u'_i u'_k} \rangle \frac{\partial \langle \overline{u_j} \rangle}{\partial x_k} + \langle \overline{u'_j u'_k} \rangle \frac{\partial \langle \overline{u_i} \rangle}{\partial x_k} \right)}_V - \\
&- \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\langle \overline{u'_i u'_j u'_k} \rangle + \frac{1}{\rho} \left(\langle \overline{p' u'_i} \rangle \delta_{kj} + \langle \overline{p' u'_j} \rangle \delta_{ik} \right) \right)}_{VI} + \\
&+ \underbrace{\langle \overline{\frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}}_{VII} - 2\nu \underbrace{\langle \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} \rangle}_{VIII} + \nu \underbrace{\frac{\partial^2 \langle \overline{u'_i u'_j} \rangle}{\partial x_k^2}}_{IX} + \\
&\underbrace{\frac{1}{V} \left[\frac{1}{\rho} \iint_{S_i} \overline{p' (v'_i n_j + v'_j n_i)} dS - \nu \iint_{S_i} \left(v'_i \frac{\partial u'_j}{\partial n} + v'_j \frac{\partial u'_i}{\partial n} \right) dS \right]}_X.
\end{aligned} \tag{1.27}$$

В этих уравнениях члены I и II – обычные нестационарный и средний адвективный члены, в которых осредненные по времени величины заменены переменными с пространственно-временным осреднением. Члены III, VI, VII, VIII и IX представляют собой порождение, турбулентную диффузию, корреляцию «давление–деформация», диссипацию и молекулярную диффузию соответственно. Рассеивающий член IV аналогичен рассеивающему члену

в уравнении (1.21). Слагаемое V представляет собой интенсивность работы среднего потока относительно аэродинамического сопротивления [100] и называется членом образования следа, так как преобразует среднюю кинетическую энергию в турбулентную в областях турбулентного следа в растительности. Дополнительный член X в уравнении (1.27) эквивалентен осреднённым по объёму корреляциям между пульсационной частью аэродинамического и вязкостного сопротивления и скоростями поверхностей элементов растительного покрова. Этот член стремится к нулю для твёрдых проницаемых препятствий. Замыкающие соотношения для членов III, VI, VII, VIII и IX в системе уравнений (1.27) можно подобрать на основе работ [101,102,103,104,105].

Предположим, что локальные числа Рейнольдса в областях с элементами растительного покрова достаточно велики, так что преобладает аэродинамическое сопротивление, тем самым отпадает необходимость разделять вклады аэродинамического и вязкостного сопротивления в члене образования следа [94,99,100]. Тогда для слагаемого V запишем:

$$V = C_d A(x_3) |V|^3 \frac{\delta_{ij}}{3}. \quad (1.28)$$

Учитывая вышеизложенные идеи относительно замыкания системы уравнений (1.27), можно легко получить уравнение баланса турбулентной кинетической энергии [41,95]:

$$\frac{\partial \langle k \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle \langle k \rangle}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial \langle k \rangle}{\partial x_j} \right) + P - \langle \varepsilon \rangle + F_k, \quad (1.29)$$

где $F_k = C_d A(x_3) |V|^3$. Кроме порождения энергии, в элементах растительного покрова происходит и потеря k , так как эти процессы сопровождаются быстрой диссипацией вихревых структур в следе [100]. Поэтому для учёта каскадного процесса переноса энергии в растительности слагаемое F_k в более общем случае можно записать как разность скорости порождения и диссипации [106]:

$$F_k = C_d A(x_3) (\beta_p |V|^3 - \beta_d |V| \langle k \rangle). \quad (1.30)$$

В соотношении (1.30) F_k , $\beta_p \in [0, 1]$ – доля средней кинетической энергии потока, которая преобразовалась в турбулентную ки-

нетическую энергию из-за сопротивления, а коэффициент $\beta_d \in [1, 0, 5, 0]$ – доля диссипации k из-за каскадного процесса [95,96].

Уравнение баланса для диссипации получается из временного осреднения $2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} [N(u_i)] = 0$, где $N(u_i)$ – уравнение Навье–Стокса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & -2\nu \left[\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}} \right] \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \\ & - 2\nu \overline{u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_j}} - \\ & - 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \frac{\partial u'_k}{\partial x_m}} - 2\nu^2 \overline{\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_m} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_m}} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} - \nu u'_j \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \frac{\partial u'_i}{\partial x_m}} - 2\nu \overline{\frac{\partial p'}{\partial x_m} \frac{\partial u'_j}{\partial x_m}} \right]. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Далее, осредняя уравнение (1.31) по объёму V , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \varepsilon \rangle}{\partial t} + \langle \bar{u}_j \rangle \frac{\partial \langle \varepsilon \rangle}{\partial x_j} = & - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\underbrace{2\nu \overline{\frac{\partial p'}{\partial x_m} \frac{\partial u'_j}{\partial x_m}}}_I + \underbrace{\langle u'_j \varepsilon' \rangle}_{II} + \underbrace{\langle \bar{u}_j'' \varepsilon'' \rangle}_{III} \right) - \\ & - 2\nu \underbrace{\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \frac{\partial u'_k}{\partial x_m}}}_{IV} - 2\nu \underbrace{\left[\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}} \right]}_V \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle}{\partial x_j} - \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned}
& -2\nu^2 \left\langle \overline{\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_m} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_m}} \right\rangle - \\
& -2\nu \left\langle \overbrace{\left[\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \right] \frac{\partial \bar{u}_i''}{\partial x_j}}^{\text{VI}} \right\rangle - \\
& -2\nu \left\langle \overbrace{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \langle \bar{u}_i \rangle}{\partial x_k \partial x_j}}^{\text{VIII}} - \overbrace{2\nu \langle u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{u}_i''}{\partial x_k \partial x_j} \rangle}^{\text{IX}} \right\rangle + \\
& + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\underbrace{v \frac{\partial \langle \varepsilon \rangle}{\partial x_j}}_{\text{X}} - \underbrace{v \langle u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \rangle}_{\text{XI}} \right] - \underbrace{\frac{\nu}{V} \iint_{S_l} \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} dS}_{\text{XII}}.
\end{aligned}$$

После анализа масштабов некоторые малые члены в уравнении (1.32) отбрасываются [99]. В (1.32) слагаемые I, II, III, X, XI представляют собой члены переноса диссипации, V – порождения диссипации, IV, VI, VIII – деструкции диссипации, а VII и IX соответствуют порождению $\langle \varepsilon \rangle$ и её деструкции, которые связаны с образованием турбулентного следа из-за элементов растительного покрова. Член XII моделирует производство $\langle \varepsilon \rangle$ в вязком пограничном слое на листе.

Уравнение (1.32) слишком сложно для замыкания и численной реализации, поэтому в соответствии с результатами [107] уравнение баланса для диссипации записывается в виде

$$\frac{\partial \langle \varepsilon \rangle}{\partial t} + \langle \bar{u}_j \rangle \frac{\partial \langle \varepsilon \rangle}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \langle \varepsilon \rangle}{\partial x_j} \right) + \frac{\langle \varepsilon \rangle}{\langle k \rangle} (C_{\varepsilon 1} P - C_{\varepsilon 2} \langle \varepsilon \rangle) + F_\varepsilon. \quad (1.33)$$

В этом уравнении $F_\varepsilon = C_{\varepsilon 4} \frac{\langle \varepsilon \rangle}{\langle k \rangle} F_k$ [95,107]. Альтернативное соотношение для этого члена предложено в работе [97]:

$$\begin{aligned}
F_\varepsilon &= C_d A(x_3) \left(C_{\varepsilon 4} \beta_P \frac{\langle \varepsilon \rangle}{\langle k \rangle} |\mathbf{V}|^3 - C_{\varepsilon 5} \beta_d |\mathbf{V}| \langle \varepsilon \rangle \right), C_{\varepsilon 4} = \\
&= 1,5, C_{\varepsilon 5} = 0,4.
\end{aligned} \quad (1.34)$$



Рисунок 1.14 – Метеорологическая мачта внутри массива растительности

Задача моделирования движения воздушных масс и переноса скаляра в элементах городской растительности является очень трудной проблемой из-за гетерогенной структуры городского атмосферного пограничного слоя. Обычно для решения этой проблемы применяются двухпараметрические модели турбулентности, а описание процессов в областях с растительностью моделируется источниками членами [108]. Такой подход даёт удовлетворительные результаты по согласованию с данными [95,96,109], которые получены в ходе измерений в протяжённом массиве растительности (рис. 1.14). Эти наблюдения показывают, что большая часть турбулентных напряжений и кинетической энергии турбулентности не порождаются в нижней части растительного покрова, а интенсивно переносятся из окружающей растительный массив области (его верхней части) за счёт тройных корреляций скорости и корреляций давления–скорости деформации. Поэтому

для описания этого эффекта некоторые авторы вводят схемы замыкания для растительности второго и третьего порядка [109]. Использование этих моделей приводит к более реальной картине течения, но влечёт за собой увеличение расчётного времени из-за возрастания числа уравнений системы, которая кроме транспортных уравнений для k и ε содержит уравнения и для напряжений Рейнольдса и корреляций третьего порядка.

Следует отметить, что теоретические и экспериментальные исследования говорят о сильной неоднородности вертикальных турбулентных сдвиговых напряжений [99] внутри растительного покрова. Взаимодействие как среднего поля течения, так и турбулентного с листвой приводит к большим скоростям преобразования средней кинетической энергии в турбулентную в масштабах следа за отдельными элементами растительности (листья и стебли), а также ускорению каскадного процесса, выражающегося в повышении диссипации [94,99,109].

1.2.2.3 Параметризация генерации турбулентности движущимся в уличном каньоне автотранспортом

Движущийся автотранспорт влияет как на мелко-, так и крупномасштабные процессы перемешивания в городской застройке из-за дополнительной генерации турбулентности и интенсификации перемещения воздушных потоков в направлении движения автотранспорта. Среди первых работ, посвящённых этому вопросу, можно отметить исследования [110,111], в которых проведены измерения и получены зависимости для оценки турбулентных характеристик течения, а также поля средней скорости в следе за движущимся автотранспортом. Правильное математическое описание явлений, вызванных передвижением автотранспорта, и геометрических характеристик расчётной области являются одними из ключевых моментов в предсказании загрязнения городского атмосферного воздуха в уличных каньонах [112].

Существует несколько подходов к решению задачи о влиянии движущегося автотранспорта в моделях анализа качества атмосферного воздуха. Так, в работе [113] рассматривается взаимодействие

двух фаз: сплошной (воздух) и дискретной фазы (движущиеся объекты – автомобили). Эта параметризация требует добавления источников в уравнения Рейнольдса для моделирования силы сопротивления воздуха и члена в уравнение для кинетической энергии для предсказания генерации кинетической энергии движущимся автотранспортом. В другом исследовании [114] описывают воздействие автотранспорта через специфические коэффициенты диффузии в уравнении для концентрации и в уравнении переноса кинетической энергии, а также с помощью дополнительных источников членов. Кроме того, авторы этой работы рассматривают процессы осаждения частиц с помощью уравнения адвекции-диффузии для массовой плотности частиц.

1.2.2.4 Влияние инсоляции на перенос примеси в уличном каньоне

Одним из наиболее интересных предметов исследования, особенно в штилевых условиях, является оценка влияния нагретых из-за солнечной радиации стен зданий на аэродинамику уличных каньонов. Изучение воздействия термической неоднородности внутри уличного каньона на воздушный поток проводилось в рамках проекта TRAPOS [44]. Исследование включало экспериментальные данные полевых измерений Nantes'99, в соответствии с которыми оказалось, что термически неоднородный слой образуется на расстоянии не более 2 см от нагретой стенки.

Влияние нагретой стенки на картину течения и распространения примеси в уличном каньоне может быть очень значительным в случае преобладания термических эффектов. В некоторых численных исследованиях [115,116] показано, что при определённых условиях $Gr/Re^2 \gg 1$ (число Грасгоффа $Gr = gL^3\beta\Delta T/\nu^2$) влияние плавучести бывает настолько велико, что основная рециркуляция в каньоне разбивается на две или полностью разрушается, а следовательно, коренным образом меняется картина распределения выхлопов от автотранспорта (рис. 1.15).

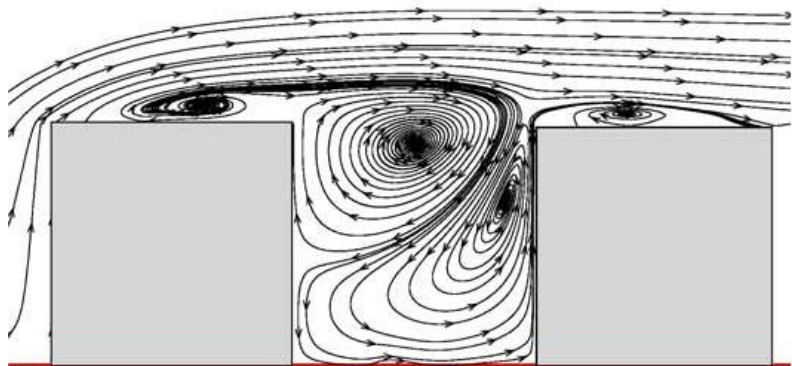


Рисунок 1.15 – Линии тока в уличном каньоне в условиях подогретой наветренной стенки [116]; скорость набегающего потока 1 м/с, температура нагретой стенки 30 °С, а фоновый уровень температуры 20 °С

Однако математические модели могут завышать влияние термических эффектов из-за упрощённой реализации метода пристенных функций или недостаточного разрешения расчётной сетки у стенки. В работе [117] исследуется воздействие плавучести на базе экспериментальных данных и расчётов с помощью математической модели CHENSI на основе «k-ε»-модели турбулентности, при этом приводится оценка погрешности моделирования. Область исследования представляет собой течение вокруг расположенного на плоскости куба с нагретой подветренной стороной. В рамках работы рассмотрены различные режимы течений с преобладанием либо сил плавучести, либо вязкости и установлены соответствующие критериальные зависимости. В частности, показано, что при $Gr/Re^2 \approx 1$ начинает проявляться воздействие термических эффектов. Кроме того, если $Gr/Re^2 > 1$, то термические эффекты оказывают доминирующее влияние на аэродинамику.

1.2.3 Микромасштабные модели аэродинамики и переноса примеси в городской застройке, использующие LES-подход

1.2.3.1 Характерные особенности вихререшающего моделирования

Основная идея метода LES заключается в формальном математическом разделении крупных и мелких структур, это реализуется

применением высокочастотного фильтра к уравнениям Навье–Стокса. Крупные вихри разрешаются явно путём численного моделирования, а мелкомасштабная турбулентность параметризуется, т.е. определяется характеристиками крупномасштабных движений. Возможности к этому открывает теория универсального равновесия Колмогорова [53,54], в соответствии с которой если нет возможности для разрешения всех масштабов турбулентного движения при численном моделировании, то следует моделировать мелкомасштабные вихри как приближенно изотропные структуры по сравнению с анизотропными крупномасштабными вихрями [52].

Чаще всего для разделения крупных и мелких структур используется операция фильтрации [50], согласно которой переменные разрешаемого масштаба определяются как

$$\bar{f}(x,t) = \int_{R^3} G(x,x')f(x',t)dx', \quad \text{где} \quad \int_{R^3} G(x)dx = 1. \quad (1.35)$$

Здесь G – функция фильтра с характерным масштабом длины Δ_f (шириной пропускания фильтра). G выбирается таким образом, чтобы фильтр подавлял преимущественно коротковолновые составляющие турбулентного движения.

Применяя операцию фильтрации к уравнениям Навье–Стокса (1.1)–(1.2), получаем систему уравнений, описывающих поведение фильтрованных компонент скорост:

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0; \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}; \quad (1.37)$$

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j. \quad (1.38)$$

Система уравнений (1.36)–(1.38) остается незамкнутой, так как (1.38) содержит исходные нефильтрованные компоненты скорости.

Тензор (1.38) характеризует влияние мелкомасштабных вихрей на эволюцию крупномасштабных вихрей, и его необходимо моделировать, как и в градиентном подходе Буссинеска замыканий для RANS-моделей [46], через установление связи τ_{ij} со средними скоростями \bar{u}_i . Последнее и составляет суть методики подсеточного моделирования.

Численное моделирование турбулентности (DNS или LES) обязательно включает некоторые вычислительные ошибки аппроксимации. С точки зрения влияния этих ошибок на адекватность моделируемых течений реальным физическим процессам для подхода крупных вихрей они являются более критичными, чем для прямого численного моделирования [118], поскольку в DNS-подходе рассчитываемый спектр энергии турбулентности уменьшается до нуля при достаточно высоких волновых числах. Таким образом, строгий контроль численных ошибок может всегда быть обеспечен за счет выбора разрешения сетки, много меньшего размеров наименьших масштабов движения, обладающих значительной энергией.

В LES-подходе рассматриваются масштабы движения большие, чем некоторая ширина фильтра Δ_f , которые представляются численно на некоторой сетке $\Delta_g \leq \Delta_f$. На практике наиболее распространенный выбор – это $\Delta_g = \Delta_f$ [119]. Поэтому в отличие от прямого численного моделирования наименьшие разрешаемые масштабы движения в методе крупных вихрей все еще имеют значительную энергию турбулентности, и важно, чтобы влияние ошибок дискретизации не превосходило влияния подсеточных процессов [47].

В работах [118,120,121] проводятся априорные и апостериорные тесты, показавшие, что ошибки, внесенные в модель на этапе дискретизации, могут превосходить вклад процессов подсеточных масштабов. Эти ошибки можно разделить на две категории: ошибки конечно-разностной аппроксимации и ошибки наложения [120]. Ошибки конечно-разностной аппроксимации [difference errors или truncation errors (TE)] возникают при численной аппроксимации производных, т.е. замене производной на ее конечно-разностный аналог. Ошибки наложения (aliasing errors AE) возникают при вычислении нелинейных членов на дискретной сетке. Их появление

связано с моделируемым явлением и состоит в том, что невозможно отображать на используемой в LES сетке весь коротковолновый участок масштабов турбулентного движения, возникающий при нелинейном взаимодействии коротковолновых гармоник [47].

В работе [118] приводится априорный теоретический анализ, рассматривается связь между порядком точности используемой схемы и отношением между ошибками аппроксимации (ТЕ и АЕ) и подсеточными силами. Показано, что при использовании центрально-разностной схемы второго порядка точности ошибки конечно-разностной аппроксимации (ТЕ) превышают влияние подсеточных сил во всем диапазоне волновых чисел. Увеличение порядка аппроксимации схемы уменьшает влияние ТЕ-ошибок, при этом в области высоких волновых чисел спектр мощности ТЕ-ошибок по-прежнему превышает спектр мощности подсеточных сил. С другой стороны, повышение порядка разностной схемы приводит к увеличению ошибок наложения. Автор работы [118] отмечает, что вклад ошибок АЕ более ощутим при численном моделировании и на всем интервале волновых чисел на порядок превосходит влияние подсеточных сил. В работе также показано, что сгущение сетки не улучшает априорных оценок.

В работах [122,123] для разрешения этой проблемы предлагается использовать подход с явной фильтрацией, который существенно улучшает априорные оценки. Он состоит в том, что явно описываются только крупные вихри на достаточно мелкой сетке

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \left(\frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}; \quad (1.39)$$

$$\tau'_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j. \quad (1.40)$$

Полагается, что фильтрация нелинейных членов позволяет уменьшить ошибки дискретизации (ТЕ и АЕ). Ссылаясь на работу [47], можно утверждать, что конечно-разностные модели в постановке (1.39)–(1.40) однозначного преимущества не дают. При этом отмечается

большая чувствительность модели к выбору турбулентного замыкания по сравнению с традиционным подходом (1.36)–(1.38).

Необходимо отметить, что в отличие от ТЕ-ошибок АЕ-ошибки могут быть исключены из моделирования при использовании псевдоспектральных численных методов, наиболее точно моделирующих весь спектральный диапазон. Однако хорошо известно, что применение этих методов ограничено случаем простых геометрий [124].

В работе [121], помимо использования статического анализа, был проведен и динамический анализ эффективности применения различных разностных схем. Сравнивались противопотоковые и центрально-разностные схемы высокого порядка точности. Было показано, что для схемы низкого порядка точности ТЕ-ошибки сильно искажают высокочастотную часть спектра энергии турбулентности, а вклад подсеточных сил мал по сравнению с ошибками дискретизации.

Результаты моделирования с использованием метода крупных вихрей для описания турбулентности и работоспособность подсеточной модели могут быть улучшены через увеличение порядка точности схемы. Вопреки статическому анализу, в работе [118] делается вывод, что ошибки наложения меньше, чем конечно-разностные ошибки, и оказывают влияние только на высокочастотную область спектра. Это утверждение, по мнению авторов [121], верно и для противопотоковых схем.

В статье [121] также указывается, что ошибки наложения уменьшаются, когда возрастает численная диссипация. Тем самым оправдывается использование диссипативных схем с монотонизаторами типа ENO, MLU [125] или направленной схемы QUICK [126]. В работе также высказывается предположение о возможности выбора оптимальной противопотоковой схемы, в которой будет наблюдаться сбалансированность между диссипативными свойствами схемы и ее возможностью подавления ошибок наложения.

Было проведено много исследований, направленных на изучение противопотоковых схем с использованием двух основных подходов. Первый заключается в применении противопотоковой схемы в традиционном LES-формализме с использованием некоторой подсеточной модели для неконсервативных разностных схем. Второй заключается в использовании схемной вязкости лишь противопотоковой

схемы без явного введения подсеточной модели [121]. Данный подход в зарубежной литературе называют MILES (monotone integrated large eddy simulation), в России он хорошо описан и применялся О.М. Белоцерковским [55,58]. Отметим, что в случае использования первого подхода необходимо, чтобы численная диссипация схемы была много меньше, чем диссипация подсеточной модели.

Использование MILES ограничено определенным кругом задач, поскольку его применение может приводить к ламинаризации потока и затуханию колебаний во всем спектральном диапазоне [47]. Применение этого метода оправдано в том случае, если существенную часть инерционного интервала можно воспроизводить явно.

Исходя из вышесказанного, можно сделать следующие промежуточные выводы к построению вихререзающей модели:

- допустимо использование противопотоковых схем высокого порядка точности со сравнительно низким уровнем диссипации энергии в сочетании с подсеточными моделями для неконсервативных схем;

- использование противопотоковых слабодиссипативных схем способствует уменьшению ошибок наложения, а конечно-разностные ошибки уменьшаются по мере повышения порядка схемы. Важно отметить, что повышение порядка точности схемы рассматривается не как способ использования более грубой сетки, а как прием, позволяющий уменьшить ту часть спектра, на которой ошибки аппроксимации превосходят влияние подсеточных сил [47].

1.2.3.2 Выбор подсеточной модели турбулентности

Поскольку после фильтрации результирующая система уравнений Навье–Стокса (1.36)–(1.38) остается незамкнутой и содержит члены, описывающие взаимодействие крупных вихрей с мелкомасштабной турбулентностью, которые необходимо моделировать, требуется использовать параметризацию этих взаимодействий с помощью замыкающих соотношений для представления τ_{ij} через сглаженные флуктуации компонент скорости.

Для этого применяются различные подсеточные модели. От подсеточной модели требуется правильное описание диссипации кине-

тической энергии турбулентности, т.е. имитация прямого каскадного перехода энергии турбулентности. Такой переход является основным механизмом перераспределения энергии в инерционном интервале трехмерной однородной и изотропной турбулентности [66].

Существует большое количество подходов моделирования подсеточных масштабов, но наиболее широкое распространение получили модели, основанные на использовании турбулентной вязкости (eddy viscosity models, EVM) для неразрешаемых напрямую турбулентных движений. В таких моделях тензор подсеточных напряжений вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} &= -2K_T \bar{S}_{ij}, \\ \bar{S}_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right); \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Здесь \bar{S}_{ij} – тензор скорости деформации, построенный по фильтрованному полю скорости \bar{u}_i , $K_T = K_T(\bar{u}, \vec{x}, t) \geq 0$ – коэффициент турбулентной вязкости, зависящий от решения. Основным свойством EVM-подхода является способность параметризовать прямой энергетический переход от крупных вихрей к мелким, а недостатком является низкая корреляция рассчитанных компонент тензора напряжений с наблюдаемыми значениями этих компонент [127].

Выбор зависимости $K_T = K_T(\bar{u}, \vec{x}, t)$ чрезвычайно разнообразен [51]. Д. Смагоринский [128] предложил влияние мелкомасштабных вихрей на эволюцию крупномасштабных аппроксимировать выражением

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} \approx \tau_{ij}^{smag} = -2C_s^2 \Delta_g^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij}. \quad (1.42)$$

Здесь $\Delta_g = h$ – шаг сетки модели (если шаг сетки по разным направлениям различный, то $\Delta_g = (h_x h_y h_z)^{1/3}$), $|\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}$ – норма тензора скорости деформации; C_s – постоянная Смагорин-

ского. Масштаб длины $C_s \Delta_g$ можно трактовать как длину смешения l для вихрей подсеточного масштаба.

Классическая модель Смагоринского обладает рядом достоинств, оправдывающих ее применение в LES:

- доказательство существования и единственности регуляризованной системы уравнений трехмерной динамики несжимаемой жидкости приведено в книге О.А. Ладыженской [129];

- в работах Лилли была найдена теоретическая оценка параметра Смагоринского $C_s \approx 0,17$, связанная с постоянной Колмогорова;

- в работе [127] на основании априорного анализа DNS было показано, что модель Смагоринского хорошо аппроксимирует сток энергии в области подсеточных масштабов.

К недостаткам классической модели Смагоринского с постоянным коэффициентом C_s следует отнести:

- завышенную диссипацию в областях с ламинарным потоком и в областях, в которых турбулентность анизотропна;

- низкую корреляцию между наблюдаемым и параметризуемым тензором напряжений, присущую всем моделям, основанным на введении эффективной турбулентной вязкости, вследствие несовпадения ориентации тензора турбулентных напряжений и тензора деформации [47].

Данный недостаток особо существен при моделировании пристеночных турбулентных потоков, турбулентных струй и других течений с большими градиентами средней скорости, поскольку в этом случае подсеточной моделью должна быть описана значительная часть потока импульса. Поэтому, например, для расчета пристеночных течений необходимо учитывать зависимость от расстояния до стенки и на основании этой зависимости варьировать коэффициент для диссипации.

В литературе встречается большое количество модификаций модели Смагоринского. Например, в модели Ван Дрифта [130] влияние стенки на длину перемешивания учитывается при помощи введения демпфирующей функции в формулу Смагоринского

$$l = C_s \Delta_g f_\mu. \quad (1.43)$$

Демпфирующая функция Ван Дрифта имеет следующий вид:

$$f_{\mu} = \left[1 - e^{-y^+/A} \right]. \quad (1.44)$$

Здесь A – эмпирическая постоянная ($A = 25$). Под y^+ понимается безразмерное расстояние до стенки $y^+ = u_{\tau} y / \nu$, где u_{τ} называют скоростью трения или динамической скоростью [48]. Возможны и другие способы задания демпфирующей функции, например учитывающие влияние угловых точек. К замечаниям следует отнести, что модель Ван Дрифта не имеет должного физического обоснования [66].

Линейные модели вихревой вязкости не способны описывать взаимодействия, приводящие к локальной генерации энергии крупных вихрей за счет мелкомасштабной подсеточной турбулентности, т.е. обратную передачу энергии от мелких вихрей к крупным. Это накладывает еще одно ограничение на область применимости моделей вихревой вязкости.

Модели подобия масштабов (Scale Similarity Model, SSM) [51,66] не используют концепцию вихревой вязкости и не требуют предположения о локальном равновесии порождения и диссипации кинетической энергии, которые используются в модели Смагоринского. В моделях подобия масштабов используется предположение о том, что крупные подсеточные вихри и малые разрешимые масштабы обладают свойством подобия. При этом учитывают возможность обратной передачи энергии от подсеточных масштабов к разрешимым масштабам. Недостаток моделей этого типа состоит в том, что они сильно занижают диссипацию, а недостаточная диссипативность подсеточной модели может привести к проблемам с устойчивостью вычислительной процедуры в случае использования бездиссипативных аппроксимаций адвективных слагаемых [66].

В работе [127] для (1.36)–(1.38) предложено использовать замыкание следующего вида:

$$\tau_{ij} \approx \tau_{ij}^{ssm} = \overline{\overline{u_i u_j}} - \overline{\overline{u_i}} \overline{\overline{u_j}}. \quad (1.45)$$

Априорные тесты, проведенные в работе [127], показали, что модель хорошо воспроизводит корреляцию между моделируемым

и наблюдаемым тензором турбулентных напряжений, однако сильно занижает диссипацию.

Также в литературе можно встретить использование смешанных моделей (Mixed Scale Model, MSM) в следующем виде [47,51]:

$$\tau_{ij}^{mix} = \tau_{ij}^{EVM} + \tau_{ij}^{SSM} = -2(C_s \Delta)^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} + (\overline{\bar{u}_i \bar{u}_i} - \bar{\bar{u}_i} \bar{\bar{u}_i}). \quad (1.46)$$

В так называемых динамических моделях (Dynamic Model, DM) коэффициент Смагоринского подбирается исходя из анализа информации, содержащейся в разрешимых масштабах движения. Для этого при реализации динамической модели применяются два фильтра: первый – сеточный фильтр (grid filter), второй – тестовый фильтр (test filter) (рис. 1.16), ширина пропускания которого $\hat{\Delta}$ превышает ширину сеточного фильтра Δ_g и обычно составляет $\hat{\Delta} = 2\Delta_g$ [131,132].

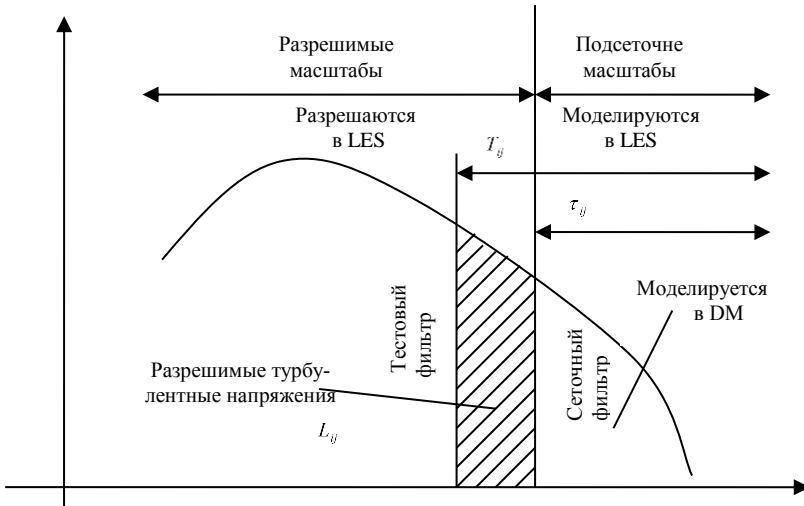


Рисунок 1.16 – Сеточный и тестовый фильтры в динамической модели (DM)

В работе [131] развит общий подход к построению динамической процедуры. Введем следующие обозначения: $\bar{u}(x, t)$ – поле скорости, отвечающее сеточному фильтру; $\hat{u}(x, t)$ – поле скорости,

отвечающее тестовому фильтру. Применим более широкий тестовый фильтр $(\hat{\quad})$ к τ_{ij} и получим

$$\hat{\tau}_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j . \quad (1.47)$$

С другой стороны, можно получить вид тензора T_{ij} для движений, оставшихся после последовательного применения фильтров $(\bar{\quad})$ и $(\hat{\quad})$ к исходной системе уравнений (1.36)–(1.38):

$$T_{ij} = \overline{u_i u_j} - \hat{u}_i \hat{u}_j . \quad (1.48)$$

Связь между тензорами подсеточных напряжений определяется соотношением

$$L_{ij} = T_{ij} - \hat{\tau}_{ij} = \overline{u_i u_j} - \hat{u}_i \hat{u}_j . \quad (1.49)$$

Это выражение не содержит нефильтрованных переменных $\overline{u_i u_j}$. Если предположить, что будет использована модель вихревой вязкости Смагоринского при вычислении компонент тензоров τ_{ij} и T_{ij} , то можно записать следующие выражения:

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = -2C_g \bar{\Delta}^2 \left| \bar{S} \right| \bar{S}_{ij} , \quad (1.50)$$

$$T_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} T_{kk} = -2C_f \hat{\Delta}^2 \left| \hat{S} \right| \hat{S}_{ij} . \quad (1.51)$$

Подставляя (1.50) и (1.51) в (1.49), получим следующее уравнение:

$$L_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} L_{kk} = \alpha_{ij} C_f - C_g \beta_{ij} . \quad (1.52)$$

Здесь

$$\alpha_{ij} = -2\hat{\Delta}^2 \left| \hat{S} \right| \hat{S}_{ij} , \quad \beta_{ij} = -2\bar{\Delta}^2 \left| \bar{S} \right| \bar{S}_{ij} . \quad (1.53)$$

Далее можно предположить, что коэффициент Смагоринского C_s не зависит от ширины фильтра и

$$C_g(x, \bar{u}, \bar{\Delta}) = C_f(x, \hat{u}, \hat{\Delta}) = C_s^2(x, \bar{u}) = C. \quad (1.54)$$

Также предполагается, что отношение фильтров $\hat{\Delta}/\bar{\Delta}$ известно и не зависит от свойств решения. Тогда можно получить переопределенную систему линейных уравнений для параметра C :

$$L_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} L_{kk} = \alpha_{ij} C - C \beta_{ij}. \quad (1.55)$$

Отметим, что в (1.55) параметр C может зависеть от пространственных координат. В работе [131] эта зависимость не учитывается, и C выносится из-под знака тестовой фильтрации, как если бы это была константа. Этот прием позволяет понизить систему интегральных уравнений до системы линейных алгебраических уравнений, которая проще для численного решения.

Искомое решение для параметра C находится из локальной минимизации квадрата невязки $E^2 = E_{ij} E_{ij}$, как это предложено в работе [133], где

$$E_{ij} = L_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} L_{kk} - \alpha_{ij} C + \beta_{ij} C. \quad (1.56)$$

В результате получаем

$$C = \frac{m_{ij} L_{ij}}{m_{kl} m_{kl}}, \quad (1.57)$$

где $m_{ij} = \alpha_{ij} - \beta_{ij}$.

Величина C , полученная из (1.57), может быть положительной или отрицательной. Отрицательное значение C означает локальную отрицательную вихревую вязкость, которая подразумевает поток энергии от малых масштабов к разрешаемым, другими словами, обратное рассеивание энергии. Это может иметь место в нестационарном потоке, однако в силу невозможности устойчивого численного счета с отрицательной вязкостью необходимо искусственно ограничивать этот параметр $0 \leq C \leq C_{\max}$ [134].

В работе [134] показано, что вынос величины C из-под знака фильтрации в (1.55) может быть математически обоснованным, если

$$C(x, y, z) = \langle C \rangle_{x,y}(z), \quad (1.58)$$

где угловые скобки означают осреднение по координатам x и y . Такой подход применим при наличии статистически однородных направлений в пространстве (в данном примере это направления вдоль осей Ox , Oy). Тогда минимизация среднеквадратичной ошибки (1.56) дает

$$C(z, t) = \frac{\langle m_{ij} L_{ij} \rangle_{xy}}{\langle m_{kl} m_{kl} \rangle_{xy}}. \quad (1.59)$$

Данный подход неприменим для случая произвольной геометрии, однако подходит для моделирования развитой турбулентности в канале с шероховатыми границами [135].

Таким образом, представлены наиболее распространенные для практического применения подсеточные модели, однако это далеко не полный их перечень. За дополнительной информацией по данному вопросу можно обратиться к работе [51].

1.2.3.3 Задание начальных и граничных условий

Моделирование крупных вихрей, как и остальные подходы к моделированию турбулентности, требует задания начальных и граничных условий, чтобы полностью определить систему дифференциальных уравнений и получить корректно поставленную задачу. В данном разделе рассматривается вопрос задания граничных условий для системы уравнений Навье–Стокса при использовании LES-подхода моделирования турбулентности.

С математической точки зрения при использовании метода крупных вихрей для предсказания турбулентной структуры течения возникает множество теоретических проблем, связанных с заданием граничных условий. Две наиболее важные из них – это возможное взаимодействие между фильтром и точным граничным условием и детальное описание граничных условий.

В [51] представлены фильтрованные уравнения Навье–Стокса на ограниченной области

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u_i u_j} \right) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} = \\ & = - \int_{g\Omega} G(x - \xi) \left[u_i(\xi) u_j(\xi) + p(\xi) - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial u_i(\xi)}{\partial x_j} \right] n_j(\xi) d\xi, \quad (1.60) \\ & \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = - \int_{g\Omega} G(x - \xi) u_i(\xi) n_i(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

где n – единичный нормальный вектор к поверхности Ω , направленный за пределы области. Такая запись фильтрованных уравнений Навье–Стокса означает, что сохраняются только члены, вызванные взаимодействием фильтра и границ, при этом пренебрегается другими ошибками. Слагаемые в правой части являются дополнительными источниками, которые необходимо моделировать, так как они содержат нефильтрованные компоненты скорости и давление.

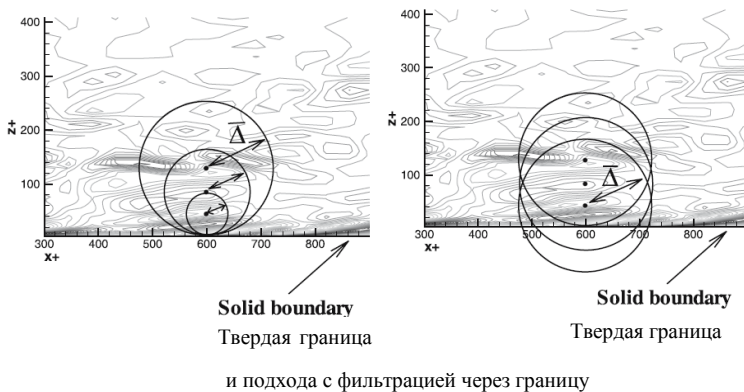
На основе представленных уравнений можно сделать вывод, что для решения этой проблемы можно использовать два подхода. Первый – классический: когда размер фильтра уменьшается по мере приближения к стенке, тогда слагаемое, описывающее взаимодействие фильтра и границы, исчезает, а основные уравнения остаются неизменными. Тогда остается только определить классические граничные условия для фильтруемой области. Второе решение впервые было предложено Лейтоном [51] и заключается в фильтрации через границу. Как следствие, вблизи границы есть слой, ширина которого примерно равна ширине фильтра, в котором нельзя пренебречь дополнительными источниками. Эти слагаемые должны быть параметризованы, т.е. смоделированы.

Если на проблему задания граничных условий взглянуть с физической точки зрения, то нужно обратить внимание, что заданные граничные условия определяют поведение решения в исследуемой области. Для того чтобы полностью воспроизвести турбулентное течение, необходимо учесть влияние граничных условий на все масштабы турбулентного движения.

Динамика пограничного слоя весьма существенно отличается от поведения однородной изотропной турбулентности в области, удаленной от твердых границ. У структуры течения в пограничном слое есть определенные особенности, которые необходимо учитывать при реализации метода крупных вихрей.

При рассмотрении структуры турбулентного пограничного слоя обычно используют безразмерное расстояние и компоненты скорости $u^+ = u / u_\tau$ и $z^+ = zu_\tau / \nu$, где $u_\tau = \sqrt{\tau_0 / \rho}$ – динамическая скорость (скорость трения), а тензор напряжения у твердой стенки τ_0 определяется по формуле $\tau_0 = \sqrt{\tau_{0,13}^2 + \tau_{0,23}^2}$, при этом $\tau_{0,ij} = \nu \bar{S}_{ij}(x, y, 0)$.

Рисунок 1.17 – Схематическое представление классического подхода



При рассмотрении структуры турбулентного пограничного слоя обычно используют безразмерное расстояние и компоненты скорости $u^+ = u / u_\tau$ и $z^+ = zu_\tau / \nu$, где $u_\tau = \sqrt{\tau_0 / \rho}$ – динамическая скорость (скорость трения), а тензор напряжения у твердой стенки

τ_0 определяется по формуле $\tau_0 = \sqrt{\tau_{0,13}^2 + \tau_{0,23}^2}$, при этом $\tau_{0,ij} = \nu \bar{S}_{ij}(x, y, 0)$.

Турбулентный пограничный слой делится на две части: внутренняя область ($0 \leq z < 0,2\delta$) и внешняя область ($0,2\delta \leq z$). Во внутренней области динамика течения определяется вязкими эффектами. Эта область занимает около 20 % от толщины пограничного слоя δ , в ней, как свидетельствуют экспериментальные данные, вырабатывается около 80 % энергии турбулентности. Внешняя область является зоной полностью развитой турбулентности и занимает около 80 % от толщины всего пограничного слоя.

В случае классического пограничного слоя мы имеем три подслоя во внутренней области [46,48,52]:

- вязкий подслой: $z^+ \leq 10$, $u_1^+(z^+) = z^+$;
 - переходная область: $10 < z^+ \leq 30$, $u_1^+(z^+) \approx 8,3 \cdot (z^+)^{1/7}$;
 - область логарифмического профиля: $30 < z^+$;
- $u_1^+(z^+) \approx 2,44 \cdot \ln z^+ + 4,9$.

Область закона следа и конец области логарифмического профиля обычно объединяются во внешнюю область.

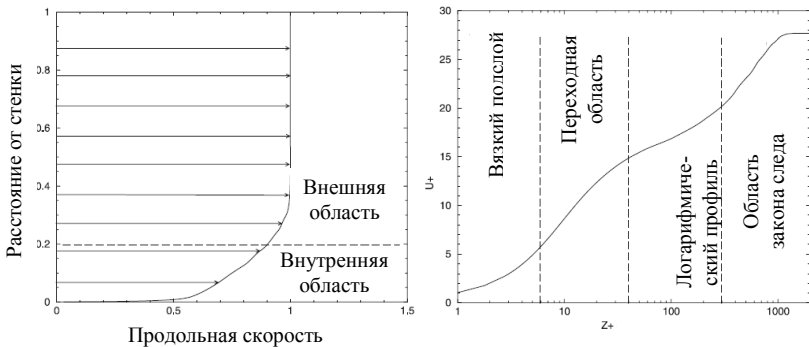


Рисунок 1.18 – Структура пограничного слоя

Описание структуры течения в пограничном слое ясно показывает проблему применимости LES-метода в данном случае. Во-первых, в вихреразрешающем моделировании механизм образования турбулентности связан с фиксированным характерным масштабом осреднения. Во-вторых, образование турбулентности в пограничном слое связано с обратным каскадом энергии, который в значительной степени доминирует над прямым переходом энергии в пристеночной области и плохо описывается или не описывается вовсе подсеточными моделями [51].

В литературе можно встретить два возможных выхода из сложившейся ситуации:

- прямое разрешение пристеночной динамики;
- моделирование пристеночной динамики.

В первом случае особо жесткие условия накладываются на используемую сетку, и число сеточных узлов, необходимых для расчета течения в пограничном слое, возрастает до величины, характерной для DNS. В работе [66] представлены оценки разрешения сетки для реализации прямого численного моделирования $\Delta x^+ = 15$, $\Delta y^+ = 5$ и $\Delta z^+ \ll 1$ (направление оси x совпадает с направлением течения, а ось z направлена по нормали к обтекаемой поверхности). Для реализации LES ограничения на размеры сетки менее жесткие:

$$\Delta x^+ = 50 \div 150, \Delta y^+ = 15 \div 40 \text{ и } \Delta z^+ < 1.$$

Во втором случае для смягчения требований, предъявляемых к вычислительным ресурсам, и учета влияния различных факторов, например шероховатости поверхности, необходимо разрабатывать модели для предсказания поведения течения жидкости около стенки. Или использовать метод пристеночных функций, который позволяет значительно уменьшить требования к используемой сетке в области пограничного слоя:

$$\Delta x^+ = 100 \div 600, \Delta y^+ = 100 \div 300 \text{ и } \Delta z^+ < 30 \div 150.$$

При этом первую ячейку сетки у стенки необходимо выбирать довольно большой, так чтобы нельзя было корректно представить динамику внутренней области. Размер первой ячейки по нормали к поверхности обычно выбирается около 100 безразмерных единиц. Это

проиллюстрировано на рис. 1.19, где наглядно показано, что вся динамика внутренней области определяется размером первой ячейки.

Модели пограничного слоя основываются на использовании внутреннего слоя около стенки, в котором строится дополнительная сетка, а на ней решается упрощенный вариант управляющих уравнений. Практически во всех моделях во внутренней области явно или неявно используется подход Рейнольдса и статистическое осреднение параметров потока.

Полного согласия по методам построения пристеночных моделей и о том, каким образом такие модели влияют на динамику LES, до настоящего момента не существует [47].

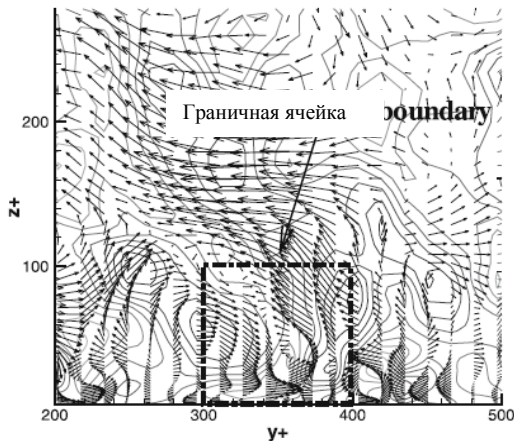


Рисунок 1.19 – Иллюстрация использования метода пристеночных функций

В качестве начальных условий возможно использование данных физического эксперимента или результатов, полученных с использованием RANS-подхода с наложением на них случайных флуктуаций с нулевым математическим ожиданием и заданной дисперсией [66]. Также в качестве начальных данных можно использовать значения компонент скорости, рассчитанные с помощью аналитических формул, аналогичных формулам из работы [135].

Для задания граничных условий на входе используют различные подходы, как правило, это зависит от решаемой задачи. Возможно использование периодических граничных условий, хотя такой подход не обладает нужной степенью общности и универсальности, но вполне пригоден для апробации различных подсеточных моделей или схем аппроксимации конвективных слагаемых.

1.2.4 Обзор численных методов и параллельных технологий, применяемых для компьютерной реализации микромасштабных метеорологических моделей

На сегодняшний момент существуют три основные методики решения задач гидродинамики [58,136,137]: метод конечных разностей, метод конечных элементов и спектральные методы. В общих чертах численную реализацию задачи данными методами можно представить в виде:

- аппроксимации неизвестных переменных, описывающих течение с использованием простых функций;
- дискретизации определяющих дифференциальных уравнений с использованием полученной аппроксимации и последующих математических операций;
- решения алгебраических уравнений.

Основная разница между этими тремя подходами заключается в способе аппроксимации переменных и процессе дискретизации.

Метод конечных разностей. Конечно-разностные методы описывают неизвестную функцию $\Phi(t, x_1, x_2, x_3)$ через её значения в узловых точках разностной сетки. Разложение в ряд Тейлора часто используется для получения конечно-разностной аппроксимации производных от Φ в каждом узле разностной сетки [138,139,140,141,142,143]. Таким образом, производные в основных уравнениях заменяются их конечно-разностными аналогами. В итоге получаем алгебраическое уравнение для величины Φ в каждой точке сетки.

Метод конечных элементов. Методы конечных элементов используют простые кусочно-линейные функции (например, линейные или квадратичные) на элементах для описания локальных изменений неизвестных переменных. Если основное уравнение имеет точное решение Φ , то подставляя кусочно-линейные аппроксимирую-

щие функции для Φ в это уравнение, получаем, что приближённое решение удовлетворяет ему с некоторой погрешностью. Далее определяют невязку для измерения погрешностей. Затем минимизируют невязку (а следовательно, и погрешности), умножая её на весовые функции и интегрируя. Как результат, мы получаем совокупность алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов аппроксимирующих функций.

Спектральные методы. Спектральные методы аппроксимируют неизвестные Φ посредством рядов Фурье или рядов из полиномов Чебышева. В отличие от конечно-разностного подхода и метода конечных элементов эти методы не являются локальными, а применимы во всей внутренней вычислительной области. Как и ранее, мы заменяем неизвестные функции в основном уравнении усеченными рядами. Таким образом, получаем алгебраические уравнения для коэффициентов ряда Фурье или Чебышева и используем идею взвешенных невязок, как в методе конечных элементов, или строим аппроксимирующие функции, которые близки к точному решению на точках сетки.

Метод конечного объёма. Метод конечного объёма был разработан как особая формулировка метода конечных разностей [49,144], но более физичен по существу. В настоящее время он является хорошо разработанным и вполне удовлетворяет основным требованиям к расчёту гидродинамических задач. Преимущество этого метода заключается в том, что он основан на макроскопических физических законах, а не на использовании математического аппарата непрерывных функций.

При решении нестационарных трехмерных уравнений гидродинамики для RANS- или LES-подходов моделирования турбулентности требуется применение суперкомпьютеров. Даже для проведения расчетов в случае сравнительно небольшой задачи и не самой подробной сетки может потребоваться от несколько суток до недели счета на обычном серийном компьютере в зависимости от быстродействия используемой техники.

В настоящее время с ростом производительности вычислительной техники и появлением новых вычислительных алгоритмов возросла популярность LES-метода моделирования турбулентности, так как он является более точным в сравнении с RANS-подходом и позволяет предсказывать нестационарную структуру потока.

Наиболее перспективным и динамичным направлением увеличения скорости решения прикладных задач является широкое внедрение идей параллелизма в работу вычислительных систем. К настоящему времени спроектированы и опробованы сотни различных компьютеров, использующих в своей архитектуре тот или иной вид параллельной обработки данных.

Одним из самых дешевых способов увеличения производительности ЭВМ является введение дополнительных процессорных узлов и организация параллельных вычислений, когда в один и тот же момент времени выполняется одновременно несколько операций обработки данных. В таком случае можно достичь ускорения процесса решения вычислительной задачи, если осуществить разделение применяемого алгоритма на информационно независимые части и организовать выполнение каждой части на разных процессорах параллельно [145].

При построении параллельных вычислительных алгоритмов выделяют 4 основных этапа.

1-й этап. Декомпозиция – после анализа задачи оценивается возможность ее распараллеливания. Алгоритм решения задачи и данные разбиваются на более мелкие части.

2-й этап. Проектирование коммуникаций – построение схем взаимодействия и обмена данными между частями задачи.

3-й этап. Укрупнение – подзадачи объединяются в более крупные блоки для повышения эффективности алгоритма и снижения трудоемкости разработки программы.

4-й этап. Планирование вычислений – задачи распределяются между процессорами с целью их эффективного использования и минимизации затрат на обмены между ними. На этапах 3 и 4 необходимо учитывать архитектурные особенности ЭВМ, для которой разрабатывается тот или иной алгоритм.

В научной литературе и технической документации можно найти более десятка различных названий, характеризующих лишь общие принципы функционирования параллельных машин: векторно-конвейерные, массивно-параллельные, компьютеры с широким командным словом, систолические массивы, гиперкубы, спец- и мультипроцессоры, иерархические и кластерные компьютеры, матричные ЭВМ и многие другие. Если же к подобным названиям для полноты описания добавить еще и данные о таких важных параметрах, как,

например, организация памяти, топология связи между процессорами, синхронность работы отдельных устройств или способ исполнения арифметических операций, то число различных архитектур станет и вовсе необозримым [145].

По-видимому, самой ранней и наиболее известной является классификация архитектур вычислительных систем, предложенная в 1966 г. М. Флинном [146]. Классификация базируется на понятии *потока*, под которым понимается последовательность элементов, команд или данных, обрабатываемая процессором. На основе числа потоков команд и потоков данных Флинн выделяет четыре класса архитектур: SISD, MISD, SIMD, MIMD.

Помимо этого, в настоящее время активно развиваются идеи использования ускорителей, где на программиста перекладывается ответственность за организацию потоков данных, при этом за счет сокращения стоимости и размеров процессоров их доступное количество значительно возрастает. Примером служат видеокарты и сопроцессоры Cell, Xeon Phi, идея использования которых при решении больших задач заключается в том, что они способны показать очень высокую производительность на отдельных задачах, при этом, используя принцип функциональной декомпозиции, можно получить достаточно эффективные программные реализации для решения сложных (в вычислительном плане) и больших (с точки зрения наполнения различными слабосвязанными блоками) программ.

При использовании параллельных компьютеров с распределяемой памятью первым по значимости является вопрос о возможности проведения параллельных вычислений для конкретной решаемой задачи. Речь идет о пересмотре взглядов на стандартные алгоритмы, поскольку некоторые из них становятся неприменимыми при увеличении числа процессоров, другие, наоборот, приобретают большое значение. Определяющим фактором для оценки перспективности алгоритма являются затраты на межпроцессорные обмены, которые необходимы для его реализации. Если алгоритм требует большого числа пересылок, то можно не получить ускорения и тем самым не будет достигнута цель применения параллельных компьютеров – уменьшение времени вычислений. Проблему поможет решить удачное распределение данных по процессорам, при котором затраты на пересылки будут минимальными.

2 Математическое моделирование турбулентного течения воздуха и переноса примеси в элементах городской застройки на основе RANS-подхода

2.1 Физическая и математическая модель исследуемого процесса

Рассматривается трёхмерное нестационарное турбулентное изотермическое движение несжимаемой ньютоновской жидкости над поверхностью с элементами крупномасштабной шероховатости. Действие массовых сил – незначительное.

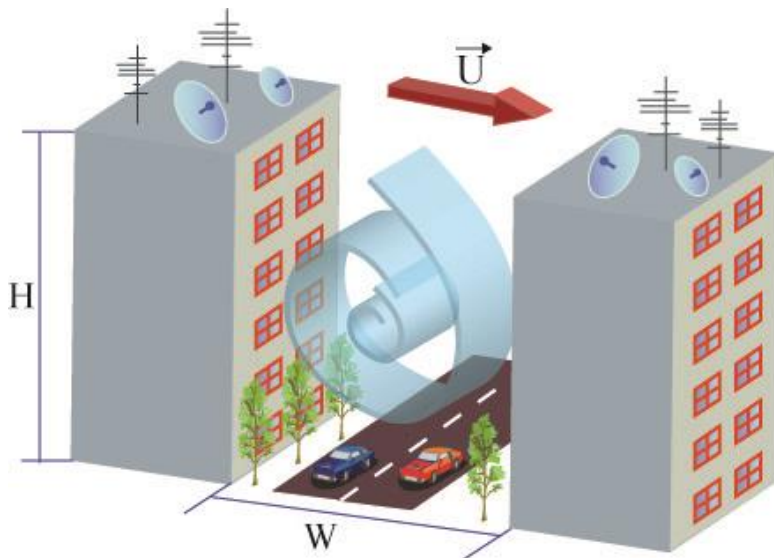


Рисунок 2.1 – Геометрия области исследования

Элементы шероховатости представляют собой прямоугольные препятствия, размеры которых соизмеримы с размерами области исследования. Рассматривается два вида неподвижных препятствий: непроницаемые для потока здания и проницаемые массивы растительности или отдельно стоящие деревья (рис. 2.1). Кроме того, учи-

тывается влияние движущегося автотранспорта на картину течения и его турбулентную структуру. Источники примеси постоянной интенсивности располагаются на дне уличного каньона. Предполагается, что выхлопы от автотранспорта не поглощаются стенами зданий и почвой.

Математическая модель включает в себя осреднённые по Рейнольдсу и объёму уравнение неразрывности и уравнения Навье–Стокса [46,96,99]:

$$\frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle}{\partial x_i} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle \langle \bar{u}_j \rangle}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \bar{p} \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \overline{u'_i u'_j} \rangle + FM_i + FMT_i, \quad (2.2)$$

$i, j = 1, 2, 3.$

Здесь $\langle \bar{u}_i \rangle$ – осреднённые проекции вектора скорости на оси координат Ox_i ; $\langle \bar{p} \rangle$ – давление; ρ – плотность; ν – кинематическая вязкость воздуха; $\langle \overline{u'_i u'_j} \rangle$ – тензор напряжений Рейнольдса; FM_i – функция, описывающая влияние растительности [95,96], а FMT_i – описывает влияние передвижения автотранспорта на городскую аэродинамику.

Осреднённое транспортное уравнение для концентрации имеет вид [147]

$$\frac{\partial \langle \bar{c} \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle \langle \bar{c} \rangle}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[D \frac{\partial \langle \bar{c} \rangle}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \overline{u'_j c'} \rangle + S, \quad (2.3)$$

где $\langle \bar{c} \rangle$ – концентрация примеси; S – функция, описывающая распределение источников примеси; D – коэффициент диффузии; $\langle \overline{u'_j c'} \rangle$ – турбулентные потоки массы.

Из-за появления корреляционных моментов второго порядка $\langle \overline{u'_i u'_j} \rangle$ и турбулентных потоков массы $\langle \overline{u'_j c'} \rangle$ система уравнений получилась незамкнутой, а для её замыкания в данной главе используются несколько моделей турбулентности различного уровня сложности.

2.2 Выбор модели турбулентности для принятого RANS-подхода. Учет влияния городской растительности и движущегося автотранспорта

2.2.1 «k-ε»-модель и замыкание Буссинеска

Один из наиболее простых способов определения напряжений Рейнольдса – это модель вихревой вязкости, впервые предложенная Буссинеском в 1877 г. [46,48,73]. Замыкающие соотношения Буссинеска записываются следующим образом:

$$-\langle \overline{u'_i u'_j} \rangle = \nu_T \left(\frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \langle k \rangle \delta_{ij}, \quad (2.4)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера; ν_T – турбулентная вязкость, а $\langle k \rangle$ – кинетическая энергия турбулентности. В отличие от кинематической вязкости ν_T является свойством движения жидкости, а не внутренним свойством вещества, поэтому она должна выражаться через зависимые переменные задачи. Уравнение (2.4) подразумевает, что функциональная связь между тензором напряжений Рейнольдса и скоростью деформации линейна. В «k-ε»-модели Лаундера и Сполдинга [148] турбулентная вязкость задаётся как

$$\nu_T = C_\mu \frac{\langle k \rangle^2}{\langle \varepsilon \rangle}, \quad (2.5)$$

где C_μ – безразмерная константа. Кроме того, модель включает два транспортных уравнения для кинетической энергии и для её диссипации ε .

В соответствии с предложенной методикой одновременного пространственного и объёмного осреднения уравнение для кинетической энергии выводится из уравнения Навье–Стокса и имеет вид [48,94,107]

$$\frac{\partial \langle k \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle \langle k \rangle}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \langle k \rangle}{\partial x_j} \right) + P - \langle \varepsilon \rangle + FK + FKT, \quad (2.6)$$

где генерация энергии турбулентности $P = \nu_T \left(\frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle}{\partial x_j}$, $\sigma_k = 1,0$, FK – функция, описывающая влияние растительности [95,96], а FKT – функция, описывающая влияние передвижения автотранспорта [42] на турбулентную кинетическую энергию в потоке. Скорость диссипации кинетической энергии турбулентности за счёт вязкости определяется как $\langle \varepsilon \rangle = \nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle$. В двухпараметрической модели величина диссипации рассчитывается из транспортного уравнения [48,94,99,107]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \varepsilon \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle \langle \varepsilon \rangle}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \langle \varepsilon \rangle}{\partial x_j} \right) \\ &+ \frac{\langle \varepsilon \rangle}{\langle k \rangle} (C_{\varepsilon 1} P - C_{\varepsilon 2} \langle \varepsilon \rangle) + \\ &+ FE + FET, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где FE и FET – функции, как и в уравнении (2.6), описывающие влияние растительности [95,96] и передвижения автотранспорта [42], но только на диссипацию турбулентной кинетической энергии в потоке, при этом принимается, что константы $C_{\varepsilon 1}$ и $C_{\varepsilon 2}$ имеют значения, используемые в «стандартной» «к-ε»-модели турбулентности: $C_{\varepsilon 1} = 1,44$, $C_{\varepsilon 2} = 1,92$, $\sigma_\varepsilon = 1,3$ [69].

Когда число Рейнольдса достаточно велико ($Re \sim 10^5$), турбулентная вязкость на несколько порядков больше, чем молекулярная. В представленной версии модели (2.1)–(2.7) для высоких чисел Рейнольдса можно исключить члены, которые учитывают влияние молекулярной вязкости. Однако у стенки турбулентная вязкость уменьшается, а влияние молекулярной становится значительным. Это приводит к появлению больших градиентов профиля скорости и турбулентных параметров, адекватное численное предсказание которых требует значительных вычислительных затрат. Для преодоления этих трудностей в данной главе используется метод пристенных функций.

2.2.2 «к-ε»-модель с нелинейной зависимостью тензора анизотропии турбулентности от тензоров скорости деформации и завихренности

Уравнение (2.4) говорит о линейной зависимости тензора анизотропии турбулентности $a_{ij} = \frac{\langle u'_i u'_j \rangle}{\langle k \rangle} - \frac{2}{3} \delta_{ij}$ от тензора скорости деформации, что, в свою очередь, указывает на методику расчёта напряжений Рейнольдса в «к-ε»-модели. А наиболее общее соотношение для компонент тензора a_{ij} имеет вид [83,85]:

$$a_{ij} = A_{ij}(S_{ij}, \Omega_{ij}),$$

где (A_{ij}) – тензор второго порядка, который представляет собой взаимосвязь между тензорами скорости деформации и завихренности:

$$S_{ij} \equiv \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle}{\partial x_i}, \Omega_{ij} \equiv \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle}{\partial x_j} - \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle}{\partial x_i}.$$

Исходя из результатов исследований [83], выражение для компонент тензора анизотропии турбулентности имеет вид

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \frac{\langle u'_i u'_j \rangle}{\langle k \rangle} - \frac{2}{3} \delta_{ij} = -\frac{\nu_T}{\langle k \rangle} S_{ij} + \\ &+ C_1 \frac{\nu_T}{\langle \varepsilon \rangle} \left(S_{ik} S_{kj} - \frac{1}{3} S_{kl} S_{kl} \delta_{ij} \right) + \\ &+ C_2 \frac{\nu_T}{\langle \varepsilon \rangle} (\Omega_{ik} S_{kj} + \Omega_{jk} S_{ki}) + \\ &+ C_3 \frac{\nu_T}{\langle \varepsilon \rangle} \left(\Omega_{ik} \Omega_{jk} - \frac{1}{3} \Omega_{kl} \Omega_{kl} \delta_{ij} \right) + \\ &+ C_4 \frac{\nu_T \langle k \rangle}{\langle \varepsilon \rangle^2} (S_{ki} \Omega_{lj} + S_{kj} \Omega_{li}) S_{kl} + \\ &+ C_5 \frac{\nu_T \langle k \rangle}{\langle \varepsilon \rangle^2} \left(\Omega_{il} \Omega_{lm} S_{mj} + S_{il} \Omega_{lm} \Omega_{mj} - \frac{2}{3} S_{lm} \Omega_{m n} \Omega_{nl} \delta_{ij} \right) + \\ &+ C_6 \frac{\nu_T \langle k \rangle}{\langle \varepsilon \rangle^2} S_{ij} S_{kl} S_{kl} + \\ &+ C_7 \frac{\nu_T \langle k \rangle}{\langle \varepsilon \rangle^2} S_{ij} \Omega_{kl} \Omega_{kl}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где $C_1 = -0,1$; $C_2 = 0,1$; $C_3 = 0,26$; $C_4 = -10C_\mu^2$; $C_5 = 0$; $C_6 = -5C_\mu^2$; $C_7 = 5C_\mu^2$.

Квадратичные комбинации S и Ω необходимы для описания анизотропии нормальных напряжений в простом сдвиговом течении, а кубические члены вводятся для учёта корректного воздействия кривизны линий тока и закрутки течения [83,88]. В работе [83] также определяется функциональная зависимость для C_μ

$$C_\mu = \frac{0,3}{1 + 0,35\{\max(\tilde{S}, \tilde{\Omega})\}^{1,5}} \left[1 - \exp\{-0,36 \cdot \exp\{0,75 \cdot \max(\tilde{S}, \tilde{\Omega})\}\} \right],$$

где безразмерные инварианты деформации и завихренности определяются следующим образом:

$$\tilde{S} \equiv \frac{\langle k \rangle}{\langle \varepsilon \rangle} \sqrt{\frac{S_{ij} S_{ij}}{2}}, \quad \tilde{\Omega} \equiv \frac{\langle k \rangle}{\langle \varepsilon \rangle} \sqrt{\frac{\Omega_{ij} \Omega_{ij}}{2}}. \quad (2.9)$$

Максимумы \tilde{S} и $\tilde{\Omega}$ используются для увеличения чувствительности модели к влиянию кривизны линий тока, при этом турбулентная вязкость ν_T рассчитывается по формуле (2.5).

Порождение кинетической энергии турбулентности для этой модели записывается следующим образом:

$$P = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle}{\partial x_j}. \quad (2.10)$$

2.2.3 Дифференциальная модель напряжений Рейнольдса

Можно получить замыкание более высокого порядка для системы (2.1)–(2.2), если использовать транспортные уравнения для каждой независимой компоненты тензора напряжений Рейнольдса. Эти дифференциальные уравнения для напряжений Рейнольдса включают все физические процессы, которые влияют на корреляции второго порядка. Они способны моделировать нестационарные и нелокальные эффекты, что невозможно с двухпараметрическими моделями, которые опираются на локальные градиенты скорости для расчёта напряжений Рейнольдса.

Уравнение для напряжений Рейнольдса имеет вид

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\frac{\partial \langle \overline{u'_i u'_j} \rangle}{\partial t}}_I + \underbrace{\langle \overline{u_k} \rangle \frac{\partial \langle \overline{u'_i u'_j} \rangle}{\partial x_k}}_{II} = - \underbrace{\langle \overline{u'_i u'_k} \rangle \frac{\partial \langle \overline{u_j} \rangle}{\partial x_k} - \langle \overline{u'_j u'_k} \rangle \frac{\partial \langle \overline{u_i} \rangle}{\partial x_k}}_{III} - \\
& \underbrace{- \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\langle \overline{u'_i u'_j u'_k} \rangle + \frac{1}{\rho} \left(\langle \overline{p' \delta_{kj} u'_i} \rangle + \langle \overline{p' \delta_{ik} u'_j} \rangle \right) \right)}_{IV} + \\
& + \underbrace{\langle \overline{\frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}}_V - 2\nu \underbrace{\langle \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} \rangle}_{VI} + \nu \underbrace{\frac{\partial^2 \langle \overline{u'_i u'_j} \rangle}{\partial x_k^2}}_{VII} + \underbrace{FS_{ij}}_{VIII} \\
& \quad + \underbrace{FST_{ij}}_{IX}, \\
& \quad i, j = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

В этих уравнениях, члены I отражают динамику турбулентных напряжений по времени; II – адвективный перенос $\langle \overline{u'_i u'_j} \rangle$; III, IV, V, VI, VII, VIII и IX представляют собой порождение, турбулентную диффузию, корреляцию «давление–скорость деформации», диссипацию, молекулярную диффузию, влияние растительности и передвижения автотранспорта соответственно.

Обобщённая градиентно-диффузионная модель Дейли–Харлоу [101] может приводить к численной неустойчивости, поэтому в данной работе для описания турбулентной диффузии решено было взять упрощённую модель [105], в которой

$$III = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial \langle \overline{u'_i u'_j} \rangle}{\partial x_k} \right), \sigma_k = 0,82, \tag{2.12}$$

а турбулентная вязкость рассчитывается по формуле $\nu_T = C_\mu \frac{\langle k \rangle^2}{\langle \varepsilon \rangle}$, $C_\mu = 0,09$.

Корреляция пульсаций давления и скорости деформации IV моделируется согласно работам [102,103,104], в которых используется следующая декомпозиция:

$$IV = \phi_{i,j,1} + \phi_{i,j,2} + \phi_{i,j,w}. \tag{2.13}$$

При этом полагаем $\phi_{i j, w}$, которое учитывает перераспределение нормальных напряжений у стенки, в нашей работе пренебрегаем. Таким образом, следуя [104], принимаем

$$\phi_{i j, 1} = -C_1 \frac{\langle \varepsilon \rangle}{\langle k \rangle} \left[\langle u'_i u'_j \rangle - \frac{2}{3} \langle k \rangle \delta_{i j} \right],$$

$$\phi_{i j, 2} = -C_2 \left[P_{i j} - \frac{2}{3} P \delta_{i j} \right],$$

где $C_1 = 1,8$, $C_2 = 0,6$, а $P_{i j} = -\langle u'_i u'_k \rangle \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle}{\partial x_k} - \langle u'_j u'_k \rangle \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle}{\partial x_k}$, $P = \frac{1}{2} P_k k$.

2.2.4 Уравнение переноса примеси

Поле концентрации загрязняющих веществ определяется из решения уравнения переноса примесей, которое имеет вид

$$\frac{\partial \langle \bar{c} \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle \langle \bar{c} \rangle}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{\nu}{Sc} + \frac{\nu_T}{Sc_T} \right) \frac{\partial \langle \bar{c} \rangle}{\partial x_j} \right) + S. \quad (2.14)$$

Здесь $\langle \bar{c} \rangle$ – концентрация примеси; Sc – число Шмидта; Sc_T – турбулентное число Шмидта; S – функция, описывающая распределение источников выброса примеси.

2.2.5 Граничные условия

Для задания значений турбулентных параметров вблизи поверхности элементов шероховатости используется метод пристенных функций [69]. Выбор такого способа задания граничных условий для k , ε и турбулентных напряжений обусловлен тем, что турбулентные характеристики вблизи поверхности (в буферном слое и вязком подслое) имеют большие градиенты. Для описания такого поведения требуется значительное количество узловых точек при конечно-разностном способе решения. В то же время известно, что в зоне развитой турбулентности изменение касательной компоненты скорости в зависимости от расстояния от поверхности хорошо описывается логарифмическим законом, а энергии турбулентности – линейным. Поэтому для определения

значений параметров вблизи стенки в данной работе используется метод пристенных функций.

В рамках локально-равновесной гипотезы турбулентное сдвиговое напряжение имеет вид

$$-\overline{\rho u'v'} = \rho l_m^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2, \quad (2.15)$$

где длина пути смещения пропорциональна расстоянию от стенки $l_m = \kappa y$, а постоянная Кармана $\kappa = 0,42$. Так как в зоне развитой турбулентности вблизи стенки $-\overline{\rho u'v'} = \tau_w$, то из (2.15) получаем выражение для τ_w , согласно которому имеет место логарифмический профиль скорости в турбулентной области пограничного слоя:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+),$$

где безразмерное расстояние от стенки $y^+ = yu_\tau/\nu$, а динамическая скорость $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$; константа интегрирования для гладких стенок $E = 9,793$ [46].

В рамках локально равновесной гипотезы соотношение $-\overline{\rho u'v'}/k$ является постоянным в логарифмическом подслое, из этого следует определение C_μ [73]:

$$C_\mu = (-\overline{\rho u'v'}/k)^2 \approx 0,09,$$

где значение 0,09 соответствует измерениям в равновесных областях для течений в пограничном слое. Предполагается, что турбулентная кинетическая энергия постоянна в пристенном вычислительном узле, и её значение (k_p) используется во всех формулах метода пристенных функций. В соответствии с этим выражение для k_p можно переписать:

$$k_p = \frac{-\overline{u'v'}}{C_\mu^{1/2}} = \frac{u_\tau^2}{C_\mu^{1/2}}.$$

Следовательно, динамическая скорость $u_\tau = C_\mu^{1/4} k_p^{1/2}$ может быть использована в (2.16) для получения явного выражения для напряжения трения на стенке:

$$\tau_w = \frac{\rho \kappa C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} \bar{u}_p}{\ln(E C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} y_p/\nu)},$$

где \bar{u}_p – скорость в пристеночном узле на расстоянии y_p от стенки.

Кинетическая энергия турбулентности k вблизи поверхности (в пристеночной ячейке разностной сетки, расположенной в области развитой турбулентности) определяется из уравнения (2.6). Однако из-за того, что порождение кинетической энергии турбулентности P у стенки имеет большие градиенты, то не всегда целесообразно использовать значение P в пристеночном узле (в центре расчетной ячейки). Вместо этого часто рассчитывается осреднённая по конечному пристенному объёму величина \bar{P} и это значение добавляется в транспортное уравнение для k у твёрдой стенки. Также здесь предполагается, что турбулентные напряжения в пристенной ячейке постоянны и равны τ_w [73]. В работе [91] было показано, что изменение величины скорости внутри вязкого подслоя (там, где турбулентные напряжения равны нулю) не приводит к порождению кинетической энергии турбулентности. В соответствии с этим средняя величина генерации турбулентности \bar{P} рассчитывается только в части пристенной ячейки – вне вязкого подслоя. Тогда осреднённое порождение кинетической энергии примет вид

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{y_n} \int_{y_v}^{y_n} -u'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} dy = \frac{1}{y_n} \int_{y_v}^{y_n} \tau_w \frac{\tau_w}{\rho k C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} y} dy = \\ &= \frac{\tau_w^2}{\rho k C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} y_n} \ln \left(\frac{y_n}{y_v} \right). \end{aligned}$$

Здесь y_n – толщина вязкого подслоя, а y_v – толщина пристенной расчётной ячейки.

Для того чтобы определить толщину вязкого подслоя y_v , используется постоянное значение числа Рейнольдса R_v [91]:

$$R_v = \frac{y_v k_p^{1/2}}{\nu} = 20.$$

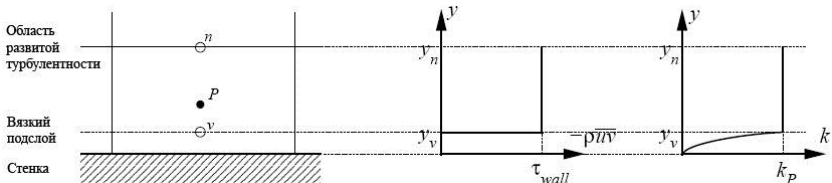


Рисунок 2.2 – Упрощённые пристенные функции Ченга–Лаундера [91]: предполагаемые профили сдвигового напряжения $-\rho u'v'$ и турбулентной кинетической энергии k в пристенной ячейке

Для расчёта средней диссипации в пристеночном узле предполагается, что в вязком подслое ε постоянно и равно величине $\frac{2\nu k_P}{y_v^2}$, а в логарифмической области из-за линейного характера изменения масштаба турбулентности $\varepsilon = k^{\frac{3}{2}}/C_l y$, где $C_l = 2,55$. Тогда после интегрирования получим:

$$\langle \bar{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{y_n} \left(y_v \frac{2\nu k_P}{y_v^2} + \int_{y_v}^{y_n} \frac{k_P^{3/2}}{C_l y} dy \right) = \frac{1}{y_n} \left(\frac{2k_P^{3/2}}{k_P^{1/2} y_v/\nu} + \frac{k_P^{3/2}}{C_l} \ln \left(\frac{y_n}{y_v} \right) \right).$$

Из-за больших градиентов ε в пристеночной области транспортное уравнение для ε не решается, вместо этого в (2.6) используется средняя по расчётной ячейке величина.

Вычисление турбулентных напряжений Рейнольдса у стенки для дифференциальной модели напряжений Рейнольдса осуществляется на основе предположений о локальном равновесии и логарифмическом профиле скорости у стенки в пренебрежении конвективным и диффузионным переносом напряжений. Тогда соотношения для турбулентных напряжений в пристенных ячейках имеют следующий вид [73]:

$$\begin{aligned} \left(\overline{\langle u_1'^2 \rangle} \right)_P &= 1,098 \cdot k_P, \left(\overline{\langle u_2'^2 \rangle} \right)_P = 0,247 \cdot k_P, \left(\overline{\langle u_1' u_2' \rangle} \right)_P = \\ &= -0,255 \cdot k_P. \end{aligned}$$

В данной работе осаждение газообразной примеси, выбрасываемой автотранспортом (например, монооксида углерода), на обтекаемых и проницаемых препятствиях не учитывается, поскольку интенсивность поглощения газообразной примеси в уличном каньоне с небольшой растительностью много меньше скорости ее поступления с автомобильными выхлопами [149]. Поэтому дифференциальное уравнение переноса примеси интегрировалось с нулевым граничным условием первого рода для концентрации во входной области и простыми градиентными соотношениями на остальных границах.

Краевые условия на выходе из расчётной области и на открытых боковых границах – это равенство нулю нормальных производных. В некоторых ситуациях, когда на входе в расчётную область распределения зависимых переменных не определены, для них используются однородные профили, характерные значения в которых полу-

чаются из полуэмпирических соотношений, обычно применяющихся для инженерных расчётов. В таких случаях, чтобы определить среднюю скорость и турбулентные величины ($\langle k \rangle$, $\langle \varepsilon \rangle$, $\langle \overline{u'_i u'_j} \rangle$), используются следующие выражения:

$$\begin{aligned}\langle \bar{u}_1 \rangle &= u_{ref}, \\ \langle k \rangle &= \frac{3}{2} (u_{ref} Tu)^2, \\ \langle \varepsilon \rangle &= C_\mu^{3/4} \frac{\langle k \rangle^{3/2}}{l}, \\ \langle \overline{u'_i u'_j} \rangle &= 0, \langle \overline{u'_i u'_i} \rangle = \frac{2}{3} \langle k \rangle,\end{aligned}$$

где $\langle \bar{u}_1 \rangle$ – компонента вектора скорости по оси Ox , u_{ref} – характерная средняя скорость; l – турбулентный масштаб длины; Tu – интенсивность турбулентности.

Если расчёты выполняются на основе экспериментальных данных или полевых измерений (например, для оценки качества модели), то граничные условия на входе задаются в соответствии с этими данными.

2.2.6 Параметризация влияния городской растительности

Влияние городской растительности рассчитывается с помощью дополнительных источников членов в осреднённых уравнениях Навье–Стокса и в транспортных уравнениях модели турбулентности (табл. 2.1).

В табл. 2.1 используются следующие обозначения: η – доля поверхности, покрытой деревьями; C_d – коэффициент сопротивления; $a = a(x_3)$ – плотность растительности в лесном массиве (например, для массива сосновых деревьев $\eta = 1$, $C_d = 0,2$, $a = 0,3125 \text{ м}^2/\text{м}^3$ [41]); $\beta_p \in [0, 1]$ – доля средней кинетической энергии потока, которая преобразовалась в турбулентную кинетическую энергию из-за сопротивления растительности, а коэффициент $\beta_d \approx (1,0 \div 5,0)$ – доля диссипации $\langle k \rangle$ из-за каскадного процесса переноса турбулентности в растительности [95]; $C_{\varepsilon 4} = 1,5$ – эмпирическая постоянная.

Таблица 2.1 – Совокупность источников в транспортных уравнениях для моделирования воздействия городской растительности

Транспортное уравнение	Источниковый член
Уравнения Рейнольдса	$FM_i = -\eta C_{da} \langle \bar{u}_i \rangle V $
Уравнение кинетической энергии турбулентности	$FK = \eta C_{da} (\beta_p V ^3 - \beta_d V \langle k \rangle)$
Уравнение диссипации кинетической энергии турбулентности	$FE = C_{\varepsilon 4} \frac{\langle \varepsilon \rangle}{\langle k \rangle} FK$
Уравнения переноса напряжений Рейнольдса	$FS_{ij} = \eta C_{da} \left(\beta_p V ^3 \frac{2}{3} \delta_{ij} - \beta_d V \langle u'_i u'_j \rangle \delta_{ij} \right)$

2.2.7 Параметризация влияния на турбулентность движущегося автотранспорта

Движущийся автотранспорт представляет собой не только источник выбросов примеси в атмосферу, но и является генератором так называемой механической турбулентности, обусловленной возмущением воздуха вследствие перемещения объектов конечной длины, имеющих существенное сопротивление. В данной работе учёт этого фактора осуществлён (так же, как и в [42]) путём добавления соответствующих членов в «к-ε»-модель турбулентности. Результаты проведённых расчётов показали, что включение в модель механической турбулентности приводит к увеличению роли турбулентной диффузии в распространении примеси в элементах городской застройки из-за повышения уровня турбулентности. Моделирование воздействия передвигающегося автотранспорта на поток воздушных масс осуществляется путём добавления источника $FMT_i = -C_{car} (\langle \bar{u}_i \rangle - V_{car,i}) Q_{car}$ в уравнения (2.2). Для учёта порождения кинетической энергии турбулентности за счёт движения автотранспорта в уравнение (2.6) добавляется к правой части следующий член $FKT = C_{car} |V - V_{car}|^2 Q_{car}$, а в уравнении (2.7) слагаемое, отвечающее за диссипацию механической энергии турбулентности, имеет вид $FET = C_{car} |V - V_{car}|^2 Q_{car} \frac{\langle \varepsilon \rangle}{\langle k \rangle}$, где $C_{car} = 0,0015$ – эмпирический коэффициент; V_{car} – скорость автомобилей; Q_{car} – число автомобилей в секунду, проходящих через заданную плоскость [42]. Следует отметить, что учёт влияния движущегося автотранспорта на картину распределе-

ния турбулентных напряжений Рейнольдса осуществляется путём добавления слагаемого $FST_{ij} = FKT \cdot \delta_{ij}2/3$ в уравнение (2.11).

2.3 Численный метод решения

2.3.1 Аппроксимация адвективно-диффузионного уравнения переноса. Решение сеточных уравнений

Расчётная область составляется фиксированным числом непересекающихся конечных объёмов так, чтобы каждый узел расчётной сетки содержался в одном объёме. Разбив таким образом расчётную область, дифференциальные уравнения интегрируют по каждому конечному объёму. Значения компонент скорости ветра определяются на границах конечных объёмов, а скалярные характеристики – в центре. Для вычисления интегралов используются кусочно-линейные профили, которые описывают изменение переменной между узлами [150].

Аппроксимация конвективных членов уравнений переноса выполняется с использованием схемы MLU Ван Лира [125]. В результате такого интегрирования получается дискретный аналог дифференциальных уравнений, в который входят значения переменной в нескольких соседних узлах. При расчёте течений в областях сложной геометрии использовался метод фиктивных областей [151], суть которого заключается в том, что используется обычная структурированная сетка, значения векторных и скалярных величин в области преграды не изменяются, а на границах фиктивных конечных объёмов равны нулю адвективно-диффузионные потоки.

Рассмотрим в качестве примера дискретизацию методом конечного объёма двумерного уравнения конвекции-диффузии с постоянным источником S :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial(U\Phi)}{\partial x} + \frac{\partial(V\Phi)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] + S, \quad (2.17)$$

где Φ – скалярная величина, которая может являться как концентрацией, так и кинетической энергией турбулентности или диссипацией либо компонентой скорости, а Γ – коэффициент диффузии величины Φ .

Перепишем наше уравнение в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial(U\Phi)}{\partial x} + \frac{\partial(V\Phi)}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] - S = 0$$

и сгруппируем члены:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[U\Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[V\Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] - S = 0,$$

а также введём потоки

$$J_x = \left[U\Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]; J_y = \left[V\Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right].$$

В результате уравнение (2.17) в двухмерной форме можно представить в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} - S = 0. \quad (2.18)$$

Проинтегрируем по конечному объёму каждый член этого уравнения (рис. 2.3 а):

$$\iint_{ws}^{en} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dydx \approx \frac{\Phi_P - \Phi_P^0}{\Delta t} (x_e - x_w)(y_n - y_s), \quad (2.19)$$

где значение функции Φ_P^0 соответствует значению Φ в центре конечного объёма на временном слое t , а значениям без индекса «0» – на слое $t + \Delta t$. Далее

$$\iint_{sw}^{ne} \frac{\partial J_x}{\partial x} dx dy = \int_s^n (J_{x_e} - J_{x_w}) dy \approx (J_e - J_w)(y_n - y_s). \quad (2.20)$$

Величины J_e, J_w представляют собой проинтегрированные по граням конечного объёма суммарные потоки, т.е. $J_e = \int J_{x_e} dy$ для грани e и т.д. Аналогичным образом получаем для всех остальных членов уравнения (2.18):

$$\iint_{ws}^{en} \frac{\partial J_y}{\partial y} dy dx = \int_w^e (J_{y_n} - J_{y_s}) dx \approx (J_n - J_s)(x_e - x_w), \quad (2.21)$$

где $J_n = \int J_{y_n} dx$ для грани «n» и т.д.

Проинтегрируем источниковый член

$$\iint_{s_w}^{n_e} S dx dy = S_p(x_e - x_w)(y_n - y_s) = S_p Vol. \quad (2.22)$$

Обозначим $\Delta X = (x_e - x_w)$, $\Delta Y = (y_n - y_s)$ (рис. 2.3, б). Тогда объём $Vol = (x_e - x_w)(y_n - y_s) = \Delta X \Delta Y$.

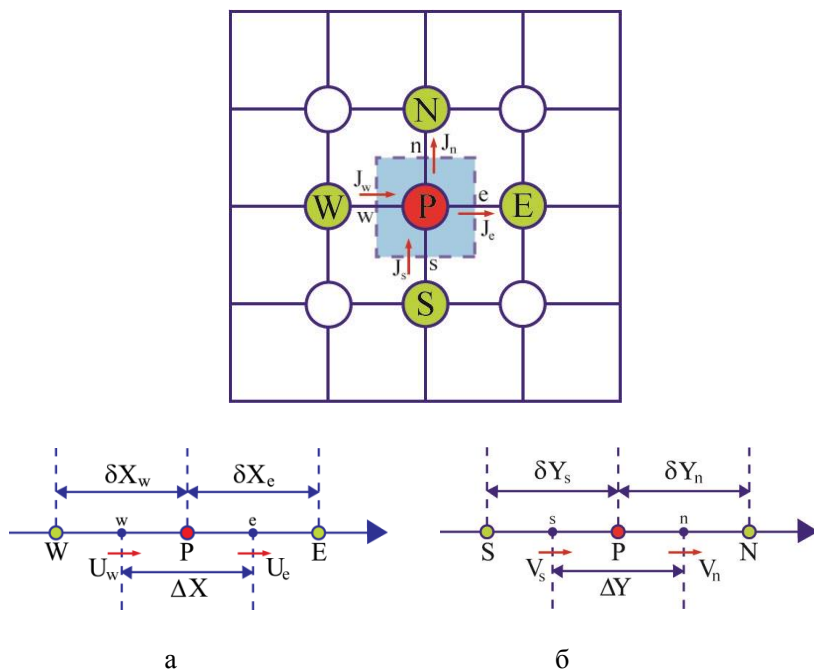


Рисунок 2.3 – Баланс потоков через конечный объём (а); обозначения размеров (б)

Поскольку источниковый член есть величина постоянная, то его можно вынести за знак интеграла.

Запишем:

$$J_e = \left(U\Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e = U_e \Phi_e - \Gamma_e \frac{\Phi_E - \Phi_P}{x_E - x_P}. \quad (2.23)$$

Для аппроксимации производной $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e$ используем разностные формулы, которые в случае равномерной сетки имеют второй поряд-

док. Все остальные компоненты конвективно-диффузионных потоков выписываются аналогично. Тогда

$$J_w = \left(U\Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w = U_w \Phi_w - \Gamma_w \frac{\Phi_P - \Phi_W}{x_P - x_W}; \quad (2.24)$$

$$J_n = \left(V\Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_n = V_n \Phi_n - \Gamma_n \frac{\Phi_N - \Phi_P}{y_N - y_P}; \quad (2.25)$$

$$J_s = \left(V\Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_s = V_s \Phi_s - \Gamma_s \frac{\Phi_P - \Phi_S}{y_P - y_S}; \quad (2.26)$$

$x_E - x_P = \delta X_e$ и $x_P - x_W = \delta X_w$ (см. рис. 2.3, б). Если сетка равномерная, то $\delta X_e = \delta X_w$.

Перепишем (2.18) после интегрирования и приближённого вычисления интегралов:

$$\frac{Vol}{\Delta t} (\Phi_P - \Phi_P^0) + (J_e - J_w) \Delta Y + (J_n - J_s) \Delta X - S_P Vol = 0. \quad (2.27)$$

Коэффициент диффузии на грани (например, e) конечного объёма вычисляется по формуле $\Gamma_e = \alpha \Gamma_E + (1 - \alpha) \Gamma_P$, где α – интерполяционный множитель; для равномерной сетки $\alpha = 0,5$. U_e, U_w, V_n, V_s – проекции вектора скорости на гранях конечного объёма (см. рис. 2.3, б).

Учитывая (1.21)–(1.24), можем записать (2.27) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{Vol}{\Delta t} (\Phi_P - \Phi_P^0) + \left(U_e \Phi_e - \Gamma_e \frac{\Phi_E - \Phi_P}{x_E - x_P} - U_w \Phi_w \right. \\ & \quad \left. + \Gamma_w \frac{\Phi_P - \Phi_W}{x_P - x_W} \right) \Delta Y + \\ & + \left(V_n \Phi_n - \Gamma_n \frac{\Phi_N - \Phi_P}{y_N - y_P} - V_s \Phi_s + \Gamma_s \frac{\Phi_P - \Phi_S}{y_P - y_S} \right) \Delta X - S_P Vol \\ & = 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Если нестационарный, диффузионный и источниковый члены в (2.17) равны нулю, а $\Phi(x, y) = 1$, то получим уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0. \quad (2.29)$$

Проинтегрируем (2.29) по конечному объёму:

$$\iint_{s w}^{n e} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) dx dy = (U_e - U_w) \Delta Y + (V_n - V_s) \Delta X = 0. \quad (2.30)$$

Умножим (2.30) на Φ_P и вычтем из (2.28). Распишем подробно, раскрыв в обоих уравнениях скобки:

$$\begin{aligned} & \frac{Vol}{\Delta t} (\Phi_P - \Phi_P^0) + \\ & + U_e \Phi_e \Delta Y - \Gamma_e \frac{\Phi_E - \Phi_P}{x_E - x_P} \Delta Y - U_w \Phi_w \Delta Y + \Gamma_w \frac{\Phi_P - \Phi_W}{x_P - x_W} \Delta Y + \\ & + V_n \Phi_n \Delta X - \Gamma_n \frac{\Phi_N - \Phi_P}{y_N - y_P} \Delta X - V_s \Phi_s \Delta X + \Gamma_s \frac{\Phi_P - \Phi_S}{y_P - y_S} \Delta X - \\ & - U_e \Phi_P \Delta Y + U_w \Phi_P \Delta Y - V_n \Phi_P \Delta X + V_s \Phi_P \Delta X - S_P Vol = 0. \end{aligned}$$

Приведём подобные слагаемые и перенесём члены, содержащие переменную Γ , в правую часть:

$$\begin{aligned} & \frac{Vol}{\Delta t} (\Phi_P - \Phi_P^0) + \\ & + [U_e (\Phi_e - \Phi_P) - U_w (\Phi_w - \Phi_P)] \Delta Y + [V_n (\Phi_n - \Phi_P) - V_s (\Phi_s - \Phi_P)] \Delta X = \\ & = \left[\frac{\Gamma_e}{x_E - x_P} (\Phi_E - \Phi_P) + \frac{\Gamma_w}{x_P - x_W} (\Phi_W - \Phi_P) \right] \Delta Y + \\ & + \left[\frac{\Gamma_n}{y_N - y_P} (\Phi_N - \Phi_P) + \frac{\Gamma_s}{y_P - y_S} (\Phi_S - \Phi_P) \right] \Delta X + S_P Vol. \end{aligned}$$

2.3.2 Схема MLU (MLU – Monotonized Linear – Upwind)

Для использования монотонизированной линейной противопотоковой схемы MLU Ван Лира [125] необходимо знать значения функции в двух предшествующих узлах сетки и в одном следующем (относительно узла P вдоль линии сетки по направлению потока):

$$\Phi_e = \begin{cases} \Phi_P + S_E^+ \frac{\delta X_e}{2}, & U_e > 0, \\ \Phi_E - S_E^- \frac{\delta X_e}{2}, & U_e \leq 0, \end{cases}$$

где

$$S_E^\pm = \minmod[(a_e + b_e^\pm)/2, 2 \cdot \minmod(a_e, b_e^\pm)],$$

функция \minmod определяется как

$$\minmod(a_e, b_e^\pm) = \begin{cases} 0, & \text{if } a_e \cdot b_e^\pm \leq 0, \\ b_e^\pm, & \text{if } |a_e| > |b_e^\pm| \text{ and } a_e \cdot b_e^\pm > 0, \\ a_e, & \text{if } |a_e| \leq |b_e^\pm| \text{ and } a_e \cdot b_e^\pm > 0, \end{cases}$$

причём a_e и b_e^\pm получаются из соотношений

$$a_e = \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\delta X_e}; b_e^\pm = \begin{cases} b_e^+ : \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\delta X_w}, U_e > 0, \\ b_e^- : \frac{\Phi_{EE} - \Phi_E}{\delta X_{ee}}, U_e \leq 0, \end{cases} \quad \delta X_{ee} = x_{EE} - x_E.$$

Рассмотрим то же самое для Φ_w :

$$\Phi_w = \begin{cases} \Phi_W + S_W^+ \frac{\delta X_w}{2}, & U_w > 0, \\ \Phi_P - S_W^- \frac{\delta X_w}{2}, & U_w \leq 0, \end{cases}$$

где $S_W^\pm = \minmod[(a_w + b_w^\pm)/2, 2 \cdot \minmod(a_w, b_w^\pm)]$,

функция \minmod определяется как

$$\minmod(a_w, b_w^\pm) = \begin{cases} 0, & \text{if } a_w \cdot b_w^\pm \leq 0, \\ b_w^\pm, & \text{if } |a_w| > |b_w^\pm| \text{ and } a_w \cdot b_w^\pm > 0, \\ a_w, & \text{if } |a_w| \leq |b_w^\pm| \text{ and } a_w \cdot b_w^\pm > 0, \end{cases}$$

причём a_w и b_w^\pm получаются из соотношений

$$a_w = \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\delta X_w}; b_w^\pm = \begin{cases} b_w^+ : \frac{\Phi_W - \Phi_{WW}}{\delta X_{ww}}, U_w > 0, \\ b_w^- : \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\delta X_e}, U_w \leq 0, \end{cases}$$

$$\delta X_{ww} = x_w - x_{WW}.$$

Схема MLU в общем случае является схемой первого порядка (на участках немонотонного изменения функции). Там, где характер изменения функции $\Phi(x, y)$ – монотонный, схема MLU обеспечивает второй порядок аппроксимации.

2.3.3 Применение схемы MLU

Перейдём к нашему конкретному случаю и вычислим $S_E^\pm, S_W^\pm, S_N^\pm, S_S^\pm$ для каждой точки из сеточного шаблона (см. рис. 2.3).

$$S_E^\pm: \quad a_e = \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\delta X_e}; \quad b_e^\pm = \begin{cases} b_e^+: \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\delta X_w}, U_e > 0, \\ b_e^-: \frac{\Phi_{EE} - \Phi_E}{\delta X_{ee}}, U_e \leq 0, \end{cases}$$

$$S_W^\pm: \quad a_w = \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\delta X_w}; \quad b_w^\pm = \begin{cases} b_w^+: \frac{\Phi_W - \Phi_{WW}}{\delta X_{ww}}, U_w > 0, \\ b_w^-: \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\delta X_e}, U_w \leq 0, \end{cases}$$

$$S_N^\pm: \quad a_n = \frac{\Phi_N - \Phi_P}{\delta Y_n}; \quad b_n^\pm = \begin{cases} b_n^+: \frac{\Phi_P - \Phi_S}{\delta Y_s}, V_n > 0, \\ b_n^-: \frac{\Phi_{NN} - \Phi_N}{\delta Y_{nn}}, V_n \leq 0, \end{cases}$$

$$S_S^\pm: \quad a_s = \frac{\Phi_P - \Phi_S}{\delta Y_s}; \quad b_s^\pm = \begin{cases} b_s^+: \frac{\Phi_S - \Phi_{SS}}{\delta Y_{ss}}, V_s > 0, \\ b_s^-: \frac{\Phi_N - \Phi_P}{\delta Y_n}, V_s \leq 0. \end{cases}$$

Объединим расчётные формулы:

$$\Phi_e = \begin{cases} \Phi_P + S_E^+ \frac{\delta X_e}{2}, & U_e > 0, \\ \Phi_E - S_E^- \frac{\delta X_e}{2}, & U_e \leq 0, \end{cases} \quad \Phi_w = \begin{cases} \Phi_W + S_W^+ \frac{\delta X_w}{2}, & U_w > 0, \\ \Phi_P - S_W^- \frac{\delta X_w}{2}, & U_w \leq 0, \end{cases}$$

$$\Phi_s = \begin{cases} \Phi_S + S_S^+ \frac{\delta Y_s}{2}, & V_s > 0, \\ \Phi_P - S_S^- \frac{\delta Y_s}{2}, & V_s \leq 0, \end{cases} \quad \Phi_n = \begin{cases} \Phi_P + S_N^+ \frac{\delta Y_n}{2}, & V_n > 0, \\ \Phi_N - S_N^- \frac{\delta Y_n}{2}, & V_n \leq 0. \end{cases}$$

Продолжим наши вычисления, используя схему MLU. Рассмотрим наше уравнение в следующем виде, исходя из предыдущих преобразований:

$$\begin{aligned}
& \frac{Vol}{\Delta t} (\Phi_P - \Phi_P^0) + \\
& + [U_e(\Phi_e - \Phi_P) - U_w(\Phi_w - \Phi_P)]\Delta Y + [V_n(\Phi_n - \Phi_P) - V_s(\Phi_s - \Phi_P)]\Delta X = \\
& = \left[\frac{\Gamma_e}{x_E - x_P} (\Phi_E - \Phi_P) + \frac{\Gamma_w}{x_P - x_W} (\Phi_W - \Phi_P) \right] \Delta Y + \\
& + \left[\frac{\Gamma_n}{y_N - y_P} (\Phi_N - \Phi_P) + \frac{\Gamma_s}{y_P - y_S} (\Phi_S - \Phi_P) \right] \Delta X + S_P Vol.
\end{aligned}$$

Перед тем как начать вычисления, введём в рассмотрение следующую функцию:

$$\text{amax1}(x, y) = \begin{cases} x, & x > y \\ y, & y > x \end{cases} \equiv |x, y|.$$

Применим эту функцию к последнему уравнению, учитывая, что если компонента скорости положительна, то её значение в функции *amax1* берём со знаком «+», в противном случае – со знаком «-». Посмотрим далее, как применяется эта функция.

$$\begin{aligned}
& \frac{Vol}{\Delta t} (\Phi_P - \Phi_P^0) + \\
& + \Delta Y \left\{ \text{amax1}(U_e, 0) \left(\Phi_P + S_E^+ \frac{\delta X_e}{2} \right) - \text{amax1}(-U_e, 0) \left(\Phi_E - S_E^- \frac{\delta X_e}{2} \right) - \right. \\
& \quad - \text{amax1}(U_e, 0)\Phi_P + \text{amax1}(-U_e, 0)\Phi_P \\
& \quad \quad - \text{amax1}(U_w, 0) \left(\Phi_W + S_W^+ \frac{\delta X_w}{2} \right) + \\
& \quad + \text{amax1}(-U_w, 0) \left(\Phi_P - S_W^- \frac{\delta X_w}{2} \right) + \text{amax1}(U_w, 0)\Phi_P \\
& \quad \quad \left. - \text{amax1}(-U_w, 0)\Phi_P \right\} + \\
& \text{(добавим теперь слагаемое со множителем } \Delta X) \\
& + \Delta X \left\{ \text{amax1}(V_n, 0) \left(\Phi_P + S_N^+ \frac{\delta Y_n}{2} \right) - \text{amax1}(-V_n, 0) \left(\Phi_N - S_N^- \frac{\delta Y_n}{2} \right) - \right. \\
& \quad - \text{amax1}(V_n, 0)\Phi_P + \text{amax1}(-V_n, 0)\Phi_P - \text{amax1}(V_s, 0) \left(\Phi_S + S_S^+ \frac{\delta Y_s}{2} \right) + \\
& \quad \left. + \text{amax1}(-V_s, 0) \left(\Phi_P - S_S^- \frac{\delta Y_s}{2} \right) + \text{amax1}(V_s, 0)\Phi_P - \text{amax1}(-V_s, 0)\Phi_P \right\} = \\
& \text{(поскольку правая часть уравнения не содержит проекций векторов скорости, то мы переписываем её без изменений)} \\
& = \left[\frac{\Gamma_e}{x_E - x_P} (\Phi_E - \Phi_P) + \frac{\Gamma_w}{x_P - x_W} (\Phi_W - \Phi_P) \right] \Delta Y +
\end{aligned}$$

$$+ \left[\frac{\Gamma_n}{y_N - y_P} (\Phi_N - \Phi_P) + \frac{\Gamma_s}{y_P - y_S} (\Phi_S - \Phi_P) \right] \Delta X + S_P Vol.$$

Все члены с «Φ» переносим влево, остальные – вправо:

$$\begin{aligned} & \frac{Vol}{\Delta t} (\Phi_P - \Phi_P^0) + \\ & + \Delta Y \{ a_{max}1(U_e, 0) \Phi_P - a_{max}1(-U_e, 0) \Phi_E - \\ & - a_{max}1(U_e, 0) \Phi_P + a_{max}1(-U_e, 0) \Phi_P - a_{max}1(U_w, 0) \Phi_W + \\ & + a_{max}1(-U_w, 0) \Phi_P + a_{max}1(U_w, 0) \Phi_P - a_{max}1(-U_w, 0) \Phi_P \} + \\ & + \Delta X \{ a_{max}1(V_n, 0) \Phi_P - a_{max}1(-V_n, 0) \Phi_N - \\ & - a_{max}1(V_n, 0) \Phi_P + a_{max}1(-V_n, 0) \Phi_P - a_{max}1(V_s, 0) \Phi_S + \\ & + a_{max}1(-V_s, 0) \Phi_P + a_{max}1(V_s, 0) \Phi_P - a_{max}1(-V_s, 0) \Phi_P \} - \\ & - \left[\frac{\Gamma_e}{x_E - x_P} (\Phi_E - \Phi_P) + \frac{\Gamma_w}{x_P - x_W} (\Phi_W - \Phi_P) \right] \Delta Y - \\ & - \left[\frac{\Gamma_n}{y_N - y_P} (\Phi_N - \Phi_P) + \frac{\Gamma_s}{y_P - y_S} (\Phi_S - \Phi_P) \right] \Delta X = \\ & = -\Delta Y \left\{ a_{max}1(U_e, 0) S_E^+ \frac{\delta X_e}{2} + a_{max}1(-U_e, 0) S_E^- \frac{\delta X_e}{2} - \right. \\ & - a_{max}1(U_w, 0) S_W^+ \frac{\delta X_w}{2} - a_{max}1(-U_w, 0) S_W^- \frac{\delta X_w}{2} \left. \right\} - \\ & - \Delta X \left\{ a_{max}1(V_n, 0) S_N^+ \frac{\delta Y_n}{2} + a_{max}1(-V_n, 0) S_N^- \frac{\delta Y_n}{2} - \right. \\ & - a_{max}1(V_s, 0) S_S^+ \frac{\delta Y_s}{2} - a_{max}1(-V_s, 0) S_S^- \frac{\delta Y_s}{2} \left. \right\} + S_P Vol. \end{aligned}$$

Далее всю правую часть обозначим как «*b*» и приведём подобные члены в левой части:

$$\begin{aligned} & \Phi_P \left\{ \Delta Y \left[a_{max}1(-U_e, 0) + a_{max}1(U_w, 0) + \frac{\Gamma_e}{x_E - x_P} + \frac{\Gamma_w}{x_P - x_W} \right] + \right. \\ & + \Delta X \left[a_{max}1(-V_n, 0) + a_{max}1(V_s, 0) + \frac{\Gamma_n}{y_N - y_P} + \frac{\Gamma_s}{y_P - y_S} \right] + \frac{Vol}{\Delta t} \left. \right\} - \\ & - \Delta Y \left\{ \Phi_E \left[a_{max}1(-U_e, 0) + \frac{\Gamma_e}{x_E - x_P} \right] \right. \\ & + \Phi_W \left[a_{max}1(U_w, 0) + \frac{\Gamma_w}{x_P - x_W} \right] \left. \right\} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \Delta X \left\{ \Phi_N \left[a_{\max}1(-V_n, 0) + \frac{\Gamma_n}{y_N - y_P} \right] \right. \\
& \left. + \Phi_S \left[a_{\max}1(V_s, 0) + \frac{\Gamma_s}{y_P - y_S} \right] \right\} = b.
\end{aligned}$$

Обозначим:

$$\begin{aligned}
a_P = & \left\{ \Delta Y \left[a_{\max}1(-U_e, 0) + a_{\max}1(U_w, 0) + \frac{\Gamma_e}{x_E - x_P} + \frac{\Gamma_w}{x_P - x_W} \right] + \right. \\
& \left. + \Delta X \left[a_{\max}1(-V_n, 0) + a_{\max}1(V_s, 0) + \frac{\Gamma_n}{y_N - y_P} + \frac{\Gamma_s}{y_P - y_S} \right] + \frac{Vol}{\Delta t} \right\};
\end{aligned}$$

$$a_E = \Delta Y \left[a_{\max}1(-U_e, 0) + \frac{\Gamma_e}{x_E - x_P} \right];$$

$$a_W = \Delta Y \left[a_{\max}1(U_w, 0) + \frac{\Gamma_w}{x_P - x_W} \right];$$

$$a_N = \Delta X \left[a_{\max}1(-V_n, 0) + \frac{\Gamma_n}{y_N - y_P} \right];$$

$$a_S = \Delta X \left[a_{\max}1(V_s, 0) + \frac{\Gamma_s}{y_P - y_S} \right];$$

$$\begin{aligned}
b = & -\Delta Y \left\{ a_{\max}1(U_e, 0) S_E^+ \frac{\delta X_e}{2} + a_{\max}1(-U_e, 0) S_E^- \frac{\delta X_e}{2} - \right. \\
& - a_{\max}1(U_w, 0) S_W^+ \frac{\delta X_w}{2} - a_{\max}1(-U_w, 0) S_W^- \frac{\delta X_w}{2} \left. \right\} - \\
& - \Delta X \left\{ a_{\max}1(V_n, 0) S_N^+ \frac{\delta Y_n}{2} + a_{\max}1(-V_n, 0) S_N^- \frac{\delta Y_n}{2} - \right. \\
& - a_{\max}1(V_s, 0) S_S^+ \frac{\delta Y_s}{2} - a_{\max}1(-V_s, 0) S_S^- \frac{\delta Y_s}{2} \left. \right\} + \frac{Vol}{\Delta t} \Phi_P^0 + S_P Vol.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно Φ :

$$a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + b, \quad (2.31)$$

для которой $a_E > 0, a_W > 0, a_N > 0, a_S > 0$ и $a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 > 0$, где $a_P^0 = \frac{Vol}{\Delta t}$.

При построении дискретного аналога придерживаются правила положительности коэффициентов и диагонального преобладания матрицы сеточных уравнений, которое влияет на устойчивость [49].

Поэтому для улучшения устойчивости численного алгоритма источниковый член S_P разделяют на две части:

$$S_P = S_C + S_{P_P} \Phi_P.$$

Вообще говоря, если S_{P_P} всегда отрицателен или может менять знак, то он переносится в левую часть дискретного аналога закона сохранения:

$$\begin{aligned} & (a_P - \min[S_{P_P}, 0] \cdot Vol) \Phi_P = \\ & = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + S_C + \max[S_{P_P}, 0] \cdot \Phi_P \cdot Vol + b', \end{aligned}$$

где $b' = b - S_P \cdot Vol$.

Тем самым улучшается диагональное преобладание матрицы коэффициентов, а следовательно, и устойчивость метода решения.

В качестве примера рассмотрим процедуру записи источников в транспортных уравнениях для кинетической энергии турбулентности k и её диссипации ε :

– уравнение для k :

$$S_C = \max[P, 0] \cdot Vol, S_{P_P} = \frac{\varepsilon - \min[P, 0]}{k} \cdot Vol,$$

– уравнение для ε :

$$S_C = C_{\varepsilon 1} \frac{\max[P, 0] \cdot \varepsilon}{k} \cdot Vol, S_{P_P} = \frac{C_{\varepsilon 2} \cdot \varepsilon - C_{\varepsilon 1} \cdot \min[P, 0]}{k} \cdot Vol.$$

В большинстве интересующих нас задач влияние значений зависимой переменной в точках, соседних с некоторой узловой, на значение в этой узловой точке обусловлено процессами конвекции и диффузии. Следовательно, увеличение значения в одной узловой точке должно при прочих равных условиях привести к увеличению (а не уменьшению) значения в соседней узловой точке. Тогда, как видно из уравнения (2.31), увеличение Φ_P при росте Φ_E возможно, если коэффициенты a_E и a_P имеют одинаковый знак. Другими словами, в общем случае, описываемом уравнением

$$a_P \Phi_P = \sum_{nb} a_{nb} \Phi_{nb} + b, \quad (2.32)$$

знаки коэффициентов перед значениями зависимой переменной в соседних точках a_{nb} и коэффициента перед её значением в центральной точке a_P должны быть одинаковыми. Таким образом, когда все коэффициенты в (2.31) (в том числе и b) положительны,

то и решение уравнения не может быть отрицательным, т.е. обеспечивается условие монотонности.

В отличие от скалярных характеристик, которые определяются в центре конечного объёма, компоненты вектора скорости определяются на его гранях (см. рис. 2.3, б). Поэтому для определения проекций вектора скорости на соответствующие оси используются смещённые конечные объёмы (рис. 2.4).

Дискретные аналоги уравнений сохранения компонент скорости U и V в соответствующих конечных объёмах имеют вид

$$a_e^U U_e = \sum_{nb} a_{nb}^U U_{nb} + b^U + (p_P - p_E) \Delta Y / \rho, \quad (2.33)$$

$$a_n^V V_n = \sum_{nb} a_{nb}^V V_{nb} + b^V + (p_P - p_N) \Delta X / \rho. \quad (2.34)$$

Значения коэффициентов $a_e^U, a_{nb}^U, a_n^V, a_{nb}^V$ связаны с влиянием совместных конвективных и диффузионных процессов на гранях конечного объёма и имеют аналогичный вид с учетом смещения конечного объёма.

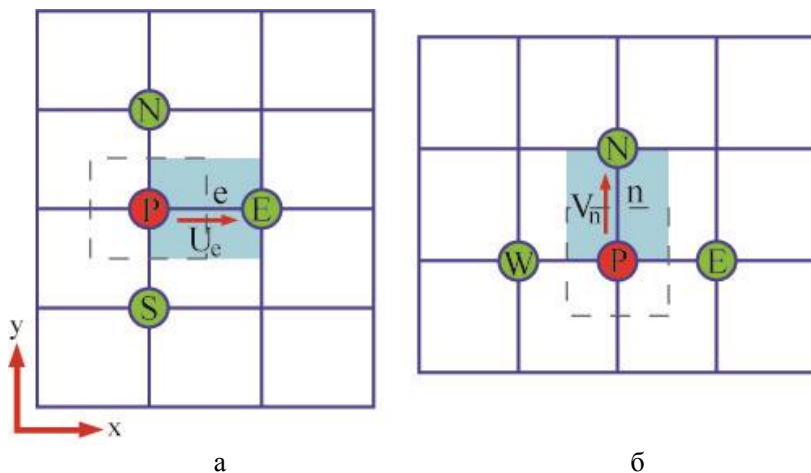


Рисунок 2.4 – Конечный объём для U -компоненты вектора скорости (а); конечный объём для V -компоненты вектора скорости (б)

2.3.4 Алгоритм решения уравнений Навье–Стокса

Уравнения количества движения можно решить только в том случае, если поле давления задано или каким-либо образом найдено. Если при решении использовалось неверное поле давления, найденное поле скорости не будет удовлетворять уравнению неразрывности. Поле скорости, получаемое с использованием приближенного поля давления p^* , выражается через U^* и V^* и находится в результате решения системы уравнений:

$$a_e^U U_e^* = \sum_{nb} a_{nb}^U U_{nb}^* + b^U + (p_P^* - p_E^*) \Delta Y / \rho, \quad (2.35)$$

$$a_n^V V_n^* = \sum_{nb} a_{nb}^V V_{nb}^* + b^V + (p_P^* - p_N^*) \Delta X / \rho. \quad (2.36)$$

Существует способ улучшения приближенного поля p^* таким образом, чтобы результирующее поле скорости с каждой итерацией лучше удовлетворяло уравнению неразрывности. Пусть истинное давление находится из соотношения [49]: $p = p^* + p'$ (p' – поправка давления). Надо выяснить, как будут изменяться составляющие скорости в соответствии с таким изменением давления. Аналогично вводятся поправки скорости [49]: $U = U^* + U'$, $V = V^* + V'$ (U' , V' – поправки скорости). Вычитая из уравнений системы (2.35)–(2.36) уравнения (2.33)–(2.34) и пренебрегая членами $\sum_{nb} a_{nb}^U U'_{nb}$, $\sum_{nb} a_{nb}^V V'_{nb}$ [49], можно получить поправочные формулы для скорости:

$$U_e = U_e^* + d_e (p'_P - p'_E), V_n = V_n^* + d_n (p'_P - p'_N), \quad (2.37)$$

где $d_e = \frac{\Delta Y}{\rho a_e^U}$, $d_n = \frac{\Delta X}{\rho a_n^V}$.

Интегрируя уравнение неразрывности по конечному объему, можно с использованием (2.37) получить его дискретный аналог в виде уравнения для поправки давления. Рассмотрим конечно-разностное уравнение неразрывности:

$$(U_e - U_w) \Delta Y + (V_n - V_s) \Delta X = 0. \quad (2.38)$$

Если вместо составляющих скорости подставить их выражения из поправочных формул для скорости, то после группировки соответствующих членов получим следующее уравнение для сеточных значений p' [49]:

$$\begin{aligned}
a_P p'_P &= a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b^P, \\
a_E &= d_e \Delta Y > 0, a_W = d_w \Delta Y > 0, \\
a_N &= d_n \Delta X > 0, a_S = d_s \Delta X > 0, \\
a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S > 0, \\
b^P &= (U_w^* - U_e^*) \Delta Y + (V_s^* - V_n^*) \Delta X.
\end{aligned}
\tag{2.39}$$

Из (2.39) можно видеть, что член b^P в уравнении для поправки давления по существу равен левой части дискретного аналога уравнения неразрывности (2.38), записанного через значения составляющих скорости с индексом *. Равенство $b^P = 0$ означает, что эти составляющие удовлетворяют уравнению неразрывности и не требуется никакой коррекции давления. Таким образом, член b^P представляет собой «источник массы», который должен быть скомпенсирован поправкой давления.

Для расчёта поля течения использовалась процедура SIMPLE Патанкара–Сполдинга [49], которая включает в себя следующую последовательность операций на каждом шаге по времени:

1. Задание начальных приближений для всех зависимых переменных.
2. Решение уравнений изменения количества движения для определения предварительных значений продольной и поперечной составляющих скорости.
3. Решение уравнения Пуассона для поправки давления.
4. Определение нового поля давления.
5. Корректировка скоростей.
6. Решение дискретных аналогов для турбулентных характеристик и концентрации.
7. Принятие полученных значений зависимых переменных в качестве исходных и повторение операций, начиная со второй.

Методы решения получаемых сеточных уравнений будут описаны в следующей главе.

2.3.5 Численная реализация метода пристеночных функций

Реализация пристенных функций, например для твёрдой стенки параллельной оси Ox , состоит из двух частей. Сперва диффузионный поток задаётся равным нулю на стенке в пристенной ячейке

(рис. 2.5), т.е. $a_s = 0$ (для стенки на южной грани конечного объёма) в дискретном аналоге уравнения количества движения.

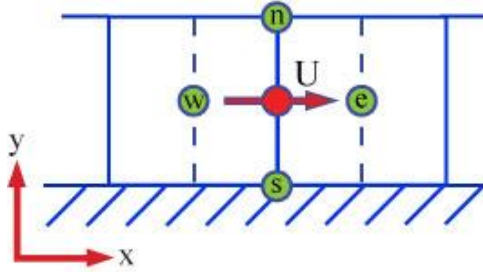


Рисунок 2.5 – Расчётные ячейки вблизи твёрдой стенки

Для того чтобы разобраться во влиянии $a_s = 0$, рассмотрим диффузионный член:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(v_{eff} \frac{\partial U}{\partial y} \right); \quad (2.40)$$

Дискретный аналог этого члена имеет вид

$$\iint_{ws}^{en} \frac{\partial}{\partial y} \left(v_{eff} \frac{\partial U}{\partial y} \right) dy dx = \left(v_{eff} \frac{\partial U}{\partial y} \right)_n \delta X_e - \underbrace{\left(v_{eff} \frac{\partial U}{\partial y} \right)_s}_{\delta X_e}, \quad (2.41)$$

где n и s – северная и южная границы ячейки. Обнуляя a_s , мы обнуляем второй член в (2.41). Это необходимо из-за того, что в противном случае $(\partial U / \partial y)_s$ пришлось бы рассчитывать, предполагая линейное изменение скорости между южной точкой S (на поверхности стенки) и пристенном узле P . Когда применяются низкорейнольдсовы модели вместе с подробной расчётной сеткой, тогда линейное изменение профиля скорости U обеспечивает адекватную аппроксимацию между узлами S и P , но в случае использования относительно крупных расчётных ячеек у твёрдых стенок требуются более точные аппроксимации.

В методе пристеночных функций заменяют $(\partial U / \partial y)_s$ на величину, полученную из предположения о логарифмическом профиле касательной скорости у стенки. После того как a_s была обнулена, второй шаг при реализации метода пристенных функций состоит в добавлении члена вместо того, который был отброшен в (2.41).

Заменённый член состоит из напряжения трения на стенке, помноженного на площадь грани пристеночной ячейки, соприкасающейся с твёрдой стенкой:

$$F_{wall} = -\tau_w/\rho \cdot \delta X_e.$$

Этот член имеет отрицательный знак из-за того, что диффузионный поток в (2.41) отрицателен. Он добавляется в источник b^U дискретного аналога уравнения Навье–Стокса для U в пристеночной ячейке. Таким образом, когда используются пристенные функции, сила трения F_{wall} выражается на основе представления скорости в пристенной ячейке. Тогда соотношение для F_{wall} в пристеночной ячейке в турбулентном подслое пограничного слоя ($y^+ > 11,6$) примет вид

$$F_{wall} = -\frac{\rho k C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} U_P \delta X_e}{\ln(E y^+)},$$

или, если $y^+ < 11,6$, тогда

$$F_{wall} = -\nu \frac{U_P}{y_P} \delta X_e.$$

В методе пристенных функций транспортное уравнение для k решается в пристеночной ячейке с изменёнными источниковыми членами (\bar{P} и $\bar{\epsilon}$). В то же время уравнение для ϵ не решается, а вместо этого рассчитывается значение диссипации в каждой пристеночной ячейке.

Необходимо отметить, что диффузионные потоки в дискретном уравнении для k так же, как и в уравнениях Рейнольдса, обнуляются на твёрдой стенке ($a_S = 0$).

Ниже будут представлены результаты апробации выбранной математической модели, вычислительного алгоритма и рассмотренных подходов турбулентного замыкания уравнений Рейнольдса для серии тестовых примеров.

2.4 Течение за обращённым назад уступом

В работе [50] приводятся результаты экспериментального и численного исследования обтекания двумерной преграды, установленной на стенке канала (поперечное сечение аэродинамической трубы

$1,372 \times 1,067 \text{ м}^2$) с полностью развитым турбулентным течением в центральной его части. В ней представлены измерения положения и размеров основной и вторичной областей рециркуляционного течения за преградой (обращенным назад уступом), а также профилей продольной составляющей скорости и кинетической энергии.

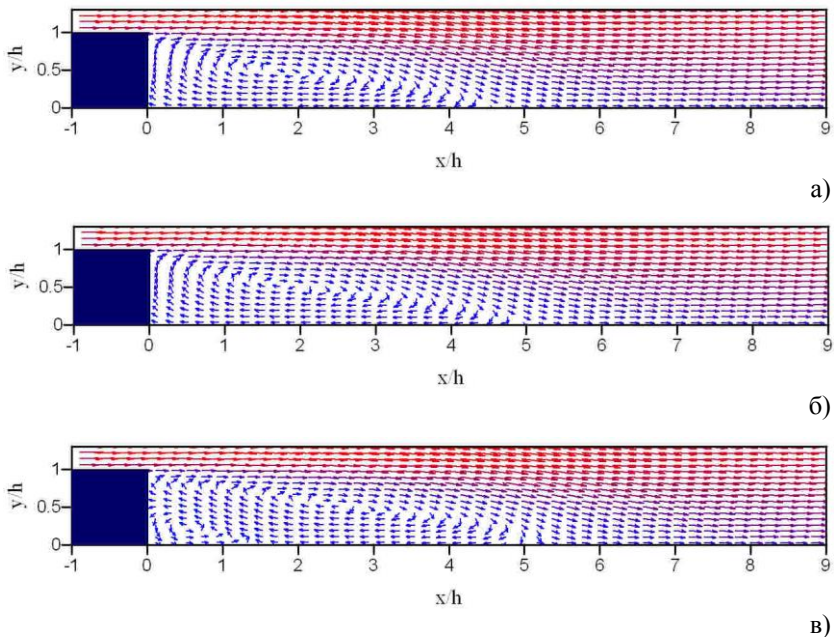


Рисунок 2.6 – Векторное поле скорости для турбулентного движения за уступом:
a – LEVM; *б* – NLEVM; *в* – RSM

Высота уступа $h = 0,076 \text{ м}$, а скорость во входном сечении равна 10 м/с . Режим течения соответствует числу Рейнольдса $Re = 50\,000$. Вычисления проводились в области размером 7 м по оси Ox и $0,5 \text{ м}$ по оси Oy на расчётной сетке размером 231×177 . При этом расчеты осуществлялись для трёх различных моделей турбулентности: LEVM («к-ε»-модель с замыканиями градиентными соотношениями Буссинеска), NLEVM («к-ε»-модель с нелинейной зависимостью тензора анизотропии турбулентности от компонент тензоров скорости деформации и завихренности), RSM (дифференциальная модель для напряже-

ний Рейнольдса). Ниже представлены векторное поле скорости турбулентного движения за уступом (рис. 2.6), график изменения коэффициента давления (рис. 2.7), безразмерная скорость и кинетическая энергия турбулентности вниз по потоку за уступом (рис. 2.8, *a*, *b*).

Сравнение трёх моделей показывает превосходство RSM-модели над всеми остальными и, в особенности, над «к-ε» с градиентными замыкающими соотношениями Буссинеска. Видно, что коэффициент давления внутри рециркуляционной области предсказывается «к-ε»-моделями хуже, чем RSM (см. рис. 2.7). По-видимому, вследствие этого вблизи стенки модуль рассчитанной по «к-ε»-модели скорости при $x/h \leq 2$ имеет большее по сравнению с экспериментом значение (см. рис. 2.8, *a*).

В эксперименте и вычислениях коэффициент давления имеет небольшое отрицательное значение (для различных моделей разное по уровню). Затем давление падает до минимального значения (эксперимент, модели LEVM и NLEVM) в точке, расположенной вниз по потоку на расстоянии не более $3h$ от уступа, что соответствует примерно половине длины зоны отрыва или остаётся постоянным (RSM). Потом коэффициент давления растёт до максимума 0,26, после которого начинается его постепенное уменьшение до величины в установившемся потоке.

Кроме того, при расчётах по различным версиям «к-ε»-модели не наблюдается образования вторичного вихря в нижнем углу за уступом (см. рис. 2.6). Тем не менее, NLEVM «к-ε»-модель значительно лучше обычной «к-ε»-модели предсказывает осреднённые величины потока (см. рис. 2.7, 2.8).

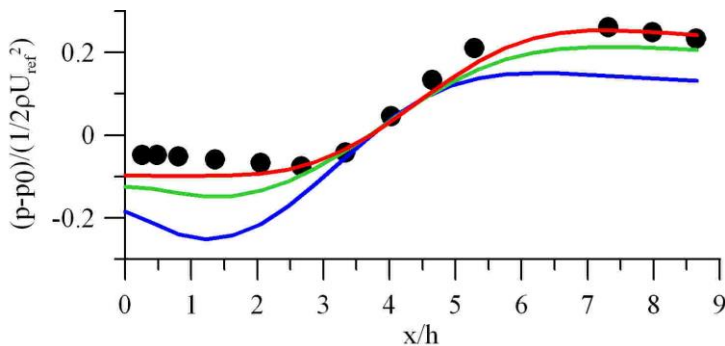


Рисунок 2.7 – Распределение коэффициента давления за обращённым назад уступом:
 — LEVM; — NLEVM; — RSM; • — эксперимент [50]

Относительно моделирования локальных турбулентных параметров можно сказать, что использование «к-ε»-модели завышает уровень кинетической энергии в застойной области течения (см. рис. 2.8, б) $x/h \leq 3$, где наблюдается вторичная рециркуляция, и занижает его вниз по потоку за точкой присоединения $x/h \geq 6$. Этот недостаток в значительно меньшей степени проявляется у NLEVM «к-ε»-модели [85].

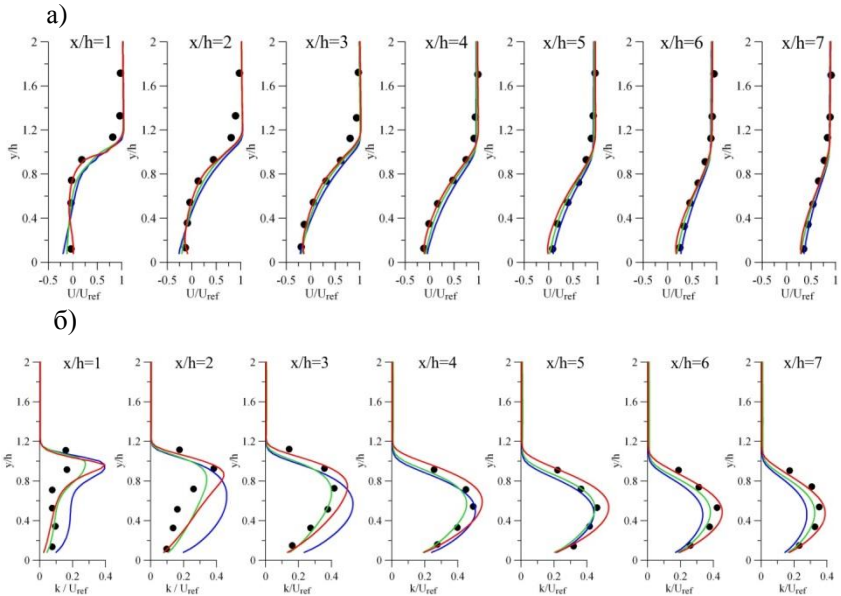


Рисунок 2.7 – Профили скорости (а) и кинетической энергии турбулентности (б) за уступом: — LEVM, — NLEVM, — RSM, • – эксперимент [50]

Если сравнивать временные затраты численного расчёта представленного выше течения, то RSM-модель по этой характеристике уступает остальным двум моделям на 30–40 %. Кроме того, использование RSM-модели может сопровождаться локальной численной неустойчивостью, что, в свою очередь, является недостатком модели. Таким образом, NLEVM [85] может рассматриваться в качестве модели, обеспечивающей более адекватное воспроизведение турбулентного рециркуляционного течения, чем обычная «к-ε»-модель. В то же время «к-ε»-модель [88] может использоваться при расчёте

сложных трёхмерных течений в элементах городской застройки, поскольку она требует меньших затрат ЭВМ по сравнению с RSM-подходом при незначительном ухудшении качества расчётов.

Полученные дискретные аналоги уравнений переноса и методы их решения сложны для анализа устойчивости и сходимости, поэтому было рассчитано течение за уступом на сетках, отличающихся друг от друга по шагу в два раза. Геометрия области расчёта соответствует рассматриваемым в этом пункте условиям. Вычисления показали, что относительная погрешность составляет не более 5 %.

Для исследования адекватности принятых в модели параметризаций городской растительности рассмотрим задачу о двумерном движении воздушных масс за рядом отдельностоящих деревьев (лесополосой) высотой H .

2.5 Течение за отдельно стоящим деревом

Рассматривается задача о двумерном движении воздушных масс за отдельно стоящим деревом высотой H . Область исследования представлена на рис. 2.9 [108]. Расчётная сетка состоит из массива конечных объёмов размером 160×87 по оси Ox и Oy соответственно. Профиль скорости во входной области имеет вид

$$U(z) = U_b(z/H_b)^{0,22}, U_b = 5,6 \text{ м/с},$$

а значения кинетической энергии и диссипации задаются постоянными $k = 3,0 \text{ м}^2/\text{с}^2$ и $\varepsilon = 1,26 \text{ м}^2/\text{с}^3$.

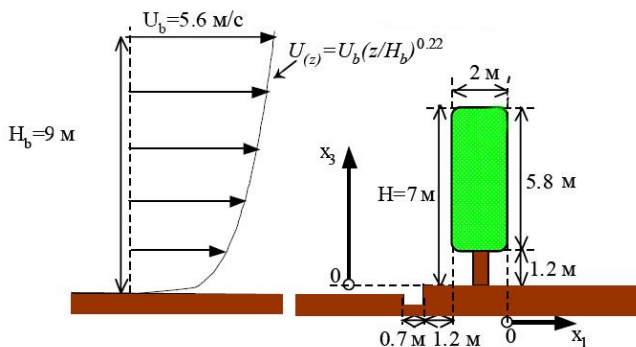


Рисунок 2.9 – Схема области исследования движения воздуха за отдельно стоящим деревом

Измерения и расчёты проводились для случая обтекания лесополосы сосновых деревьев, поэтому в уравнениях движения и модели турбулентности для коэффициентов в источниковых членах, моделирующих влияние растительности, были выбраны следующие: $\eta = 1$, $C_d = 0,2$, $a = 0,3125 \text{ м}^2/\text{м}^3$ [108].

На рис. 2.10 приведены вертикальные профили осевой скорости и кинетической энергии турбулентности на различных расстояниях от дерева. Вычисления показывают, что в области, занимаемой растительностью, преобладают процессы вязкой диссипации, вследствие чего за деревом кинетическая энергия турбулентности имеет минимальные значения. В то же время из-за значительных градиентов скорости в верхней части кроны дерева и над ним наблюдается повышение интенсивности турбулентного переноса.

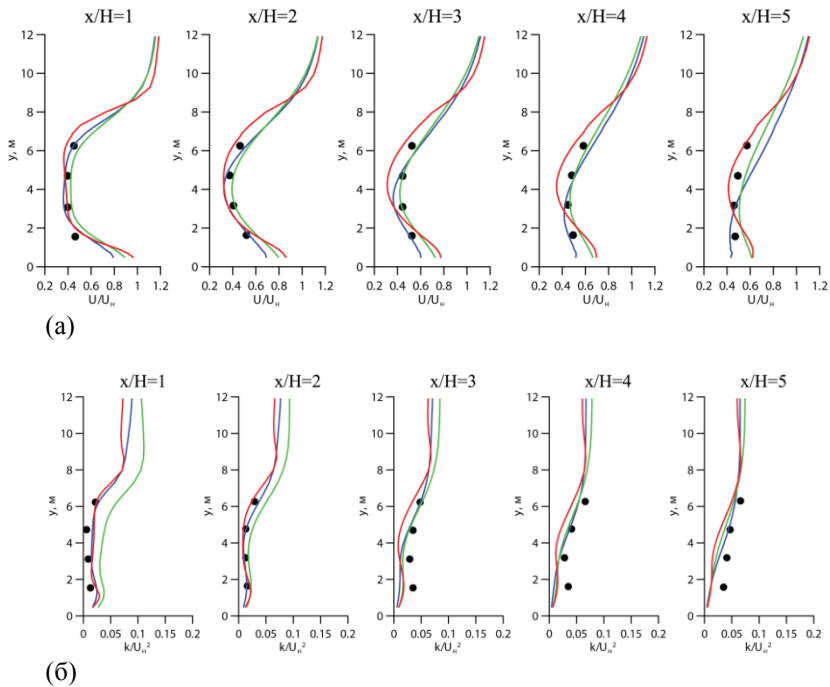


Рисунок 2.10 – Сравнение вертикальных профилей скорости (а) и кинетической энергии (б) за деревом: — LEVM; — NLEVM; — RSM; ● – эксперимент [108]; U_H – скорость при $y = H$

Сопrotивление, которое оказывает набегающему потоку проникаемая преграда, приводит к уменьшению осевой компоненты скорости за деревом (рис. 2.10, а). В силу того, что в области, занятой деревом, действуют силы сопротивления, воздушные массы перемещаются в сторону наименьшего сопротивления потока. Очевидно, минимальное сопротивление потоку оказывает свободное пространство над деревом, что и обуславливает направление движения части воздушной массы вверх. С другой стороны, вследствие того, что у основания плотность растительности ниже, вблизи поверхности имеют место более высокие значения осевой скорости (рис. 2.10, а).

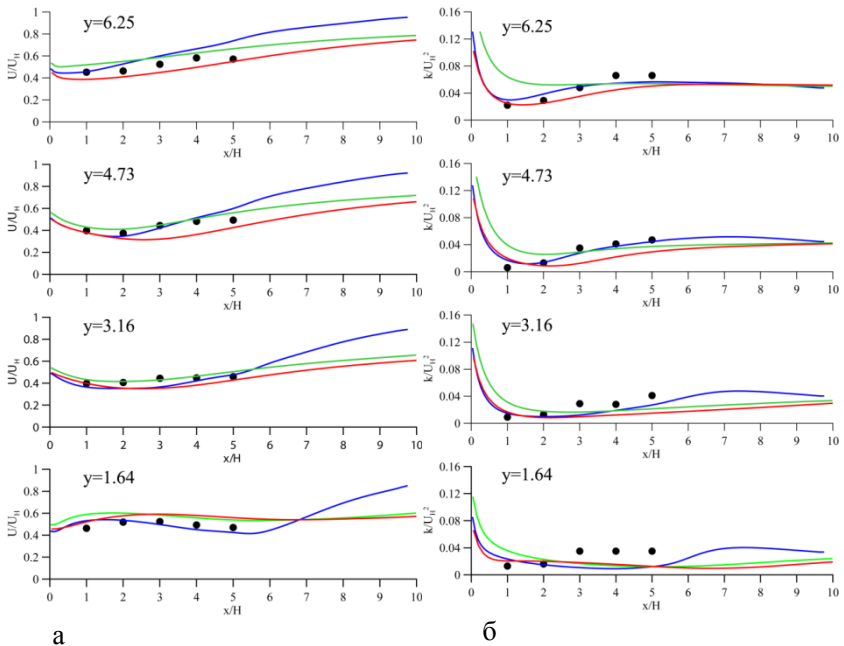


Рисунок 2.11 – Горизонтальные профили продольной скорости (а) и кинетической энергии (б) за деревом: — LEVM; — NLEVM; — RSM; • — эксперимент [108], U_H – скорость при $y = H$

Всё это отражает качественное сходство с расчётными данными, которые получены в работах [152,153]. Расчёты демонстрируют преобладание процессов вязкой диссипации внутри растительности. Это

объясняется тем, что крупномасштабные энергосодержащие вихревые структуры дробятся внутри области с растительностью на мелкие, в которых преобладают процессы вязкой диссипации. Кроме того, вычисления отражают тот факт, что предложенные параметризации растительности для различных турбулентных замыканий оказывают неодинаковое воздействие на параметры потока в следе за деревом (рис. 2.11, *а, б*). Этот эффект хорошо просматривается на рис. 2.11, где изображены профили турбулентной кинетической энергии. Повышение порядка замыкания турбулентности приводит к ухудшению корреляций между экспериментом и расчётами для кинетической энергии в некоторых сечениях как для NLEVM, так и для RSM. В то же время параметризация растительности через источники в уравнениях сохранения удовлетворительно предсказывает среднее поле скорости. Такое поведение можно объяснить тем, что предложенные модели для растительности в большинстве случаев применялись для моделирования структуры турбулентного течения внутри растительных массивов, а не для описания аэродинамики вокруг растительности. Несмотря на то, что в математической модели отсутствуют дополнительные соотношения для $\overline{u_i'' u_j''}$, экспериментальные и расчётные данные [100] показывают, что эффекты, которые связаны с этим членом, незначительны. В целом, несмотря на это, получено хорошее согласие с данными измерений [97] и физической картиной процесса, описанной в [98], поэтому далее в книге они будут применяться для исследований как в двумерной версии модели, так и в трёхмерной.

2.6 Результаты тестирования численной модели (течение вокруг куба)

Течения вокруг плохо обтекаемых тел, которые имеют место в различных инженерных приложениях, в том числе и при исследовании аэродинамики элементов городской застройки, включают сложные явления, такие как отрыв и присоединение потока, образование нестационарного вихря, повышенный уровень турбулентности. Естественно, что на практике существует необходимость воспроизводить такого рода течения, хотя это трудная задача даже для относительно простых геометрий.

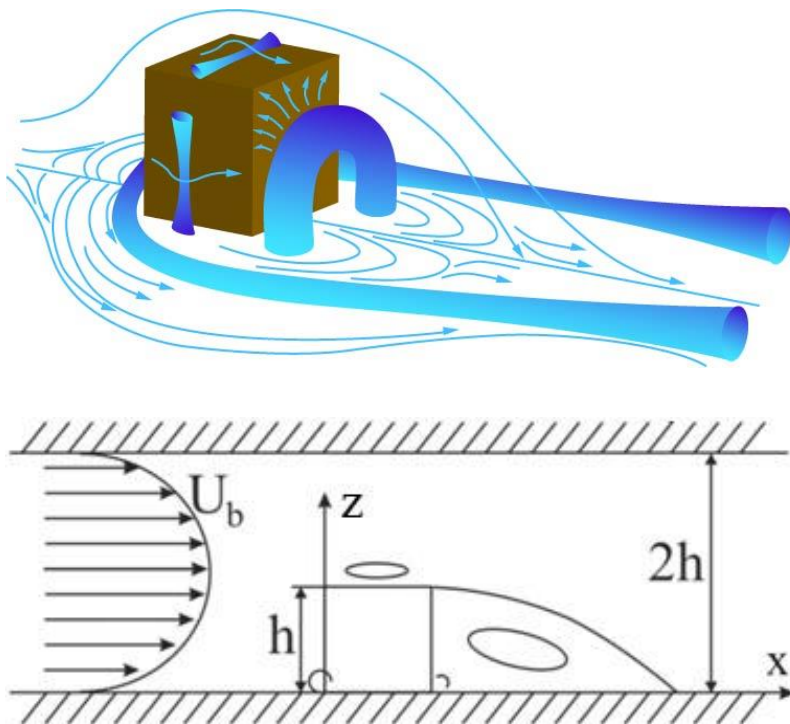


Рисунок 2.12 – Схема течения и расчётной области для турбулентного движения воздуха вокруг куба

Рассмотрим турбулентный поток вокруг правильного параллелепипеда, который расположен на гладкой поверхности. Эта расчётная геометрия является наиболее простой идеализацией здания. Результаты подробного экспериментального исследования этого течения представлены в работе Мартинуци и Тропеа [154].

Куб высотой h расположен в канале высотой $2h$ и шириной $4h$ с развитым турбулентным течением при числе Рейнольдса $Re = U_b h / \nu = 40\,000$, где $U_b = 28,8$ м/с – средняя скорость потока на входе в канал. Расчёты проводились на неравномерной сетке размером $147 \times 82 \times 42$ в направлениях x , y , z соответственно.

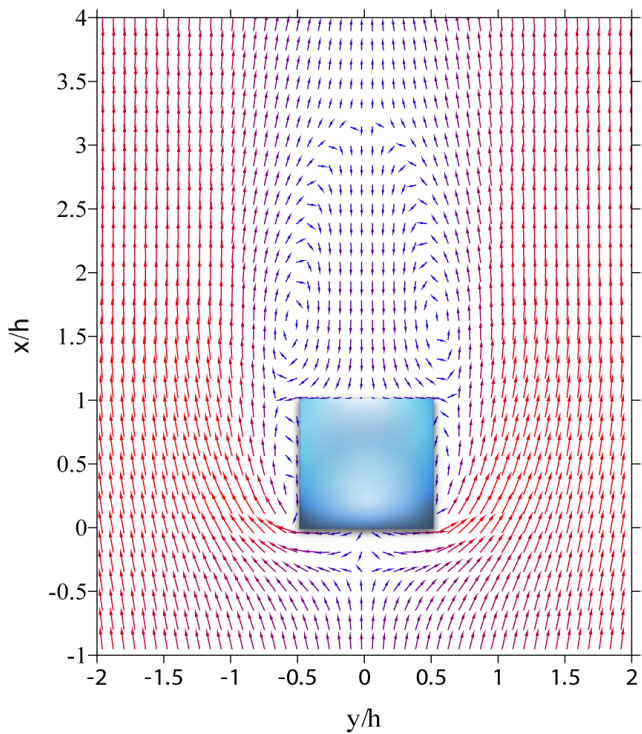
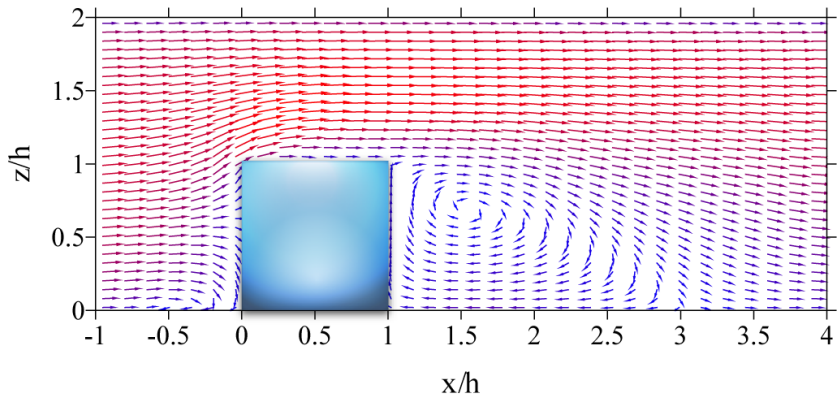


Рисунок 2.13 – Векторные поля скорости в плоскости $y = 0$ м (сверху) и вблизи поверхности в плоскости $z/h = 0,15$ (снизу)

Когда течение нестационарное, осреднение по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса не является синонимом временному осреднению. Поэтому в данном случае необходимо рассчитывать течение в рамках этого подхода в нестационарной постановке. Следовательно, в том случае, если поток периодический во времени, то для того чтобы сравнивать осреднённые по времени данные эксперимента с результатами нестационарных RANS-расчётов, результаты вычислений должны быть осреднены для одного периода [155].

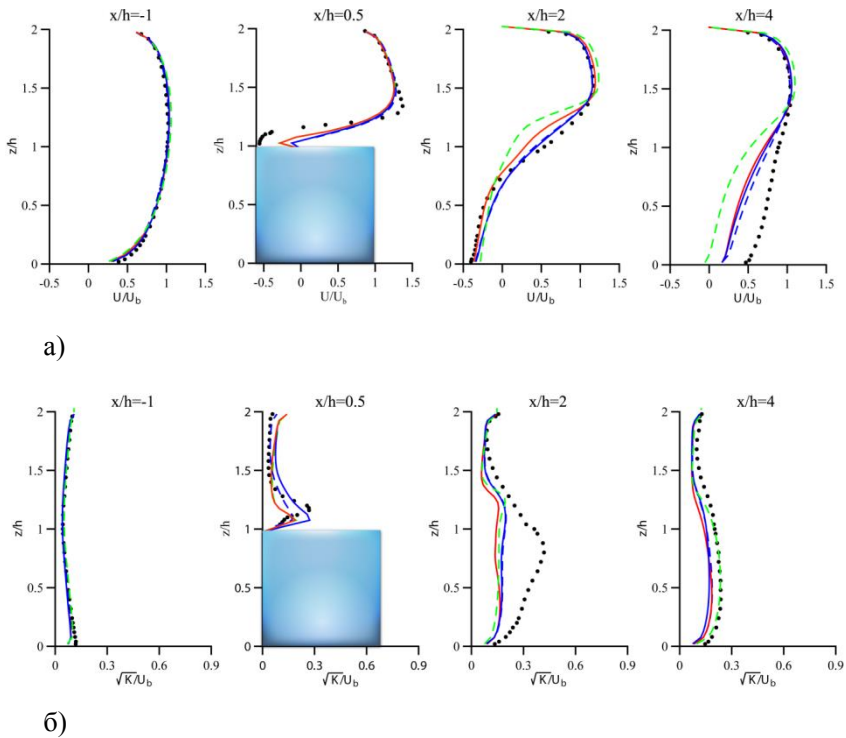


Рисунок 2.14 – Продольная составляющая вектора скорости для течения вокруг куба (а); турбулентная кинетическая энергия для течения вокруг куба (б); — «к-ε»-модель в нестационарной постановке; — NLEVM в нестационарной постановке; - - - «к-ε»-модель в стационарной постановке; - - - NLEVM в стационарной постановке; ● – эксперимент [154]

Вычисления для предложенной геометрии проводились как в стационарном приближении, так и в нестационарном. Таким образом, эти расчёты позволили оценить степень чувствительности различных моделей турбулентности к нестационарным эффектам. Для неустановившегося режима течения используются следующие шаги по времени: $\Delta t = 10^{-6}$ с, а время расчёта составляет 0,015 с [155]. Чтобы провести сравнение результатов вычислений при неустановившемся режиме течения, проводится осреднение параметров для всего времени интегрирования.

Расчёты и измерения показывают, что даже при обтекании преграды такой простой геометрии наблюдается очень сложное течение (рис. 2.12, 2.13) с сильными градиентами давления, кривизной линий тока и многочисленными зонами разделения и присоединения потока.

По ходу движения поток разделяется на фронтальной грани куба, образуя вторичные рециркуляции на верхней грани куба и у его боковых плоскостей, а также у нижней части фронтальной грани (см. рис. 2.13). При этом основной вихрь в следе за кубом имеет форму подковы, и там развивается большая отрывная зона, которая взаимодействует с подковообразным вихрем. В дополнение ко всему в области рециркуляции за кубом образуется вихрь в виде арки (рис. 2.13, 2.14).

Расчёты показывают, что широко используемая в инженерных расчётах стандартная «к-ε»-модель не вполне адекватно моделирует течение и турбулентную структуру в области, где встречаются рециркуляционные движения жидкости (см. рис. 2.14). Видно, что NLEVM-модель лучше воспроизводит рециркуляционную область на верхней грани куба, в то время как «к-ε»-модель данную рециркуляцию ослабляет. Это связано с хорошо известным свойством этой модели [85,148] завышения кинетической энергии турбулентности в застойных областях. Высокий уровень кинетической энергии приводит к завышенным значениям турбулентной диффузии и, следовательно, препятствует разделению течения. Модель с нелинейной зависимостью тензора анизотропии от компонент тензоров S и Ω в значительно меньшей степени подвержена этому недостатку, а поэтому может корректно предсказывать области рециркуляционного течения в соответствии с экспериментом. Кроме того, в области, близкой к твёрдой стенке, где анизотропия турбулентной струк-

туры потока велика, моделирование с помощью NLEVM также даёт лучшие результаты [85,87,88].

В следе за кубом профили скорости, рассчитанные с помощью численных моделей, показывают заметную разницу между измеренными и вычисленными значениями. Модель NLEVM воспроизводит значительные градиенты продольной скорости и кинетической энергии турбулентности, как и в эксперименте. Однако положение центральной части области основной рециркуляции потока явно не соответствует данным эксперимента [154], что очень заметно для стационарных расчётов. Обычная « k - ε »-модель с замыкающими соотношениями Буссинеска не способна адекватно предсказывать такие большие градиенты величин, и поэтому профили выглядят более гладкими (см. рис. 2.14). Кроме того, видно, что область основной циркуляции за кубом и точка присоединения потока моделируются лучше с помощью NLEVM. Сопоставление стационарных и нестационарных расчётов по « k - ε »-модели говорит о малом их отличии, что свидетельствует о невозможности учёта тонких эффектов, связанных с периодичностью потока. Проводя сравнение подобных вычислений с помощью NLEVM-модели, можно отметить её чувствительность к изменчивому характеру рассматриваемого течения [155]. Результаты говорят о том, что форма вихря в следе за кубом – в виде арки, а величина скорости ближе к осреднённым экспериментальным данным. Из расчётов видно, что существует занижение турбулентной кинетической энергии в следе в случае применения обоих замыканий турбулентности. Объяснить это можно, по-видимому, игнорированием дополнительных транспортных уравнений для турбулентных характеристик. Вследствие того, что в NLEVM-модели используются алгебраические соотношения для напряжений, в которых содержатся две турбулентные характеристики (k и ε), а также комбинации тензоров S и Ω , которые, по сути, являются зависимыми от поля средней скорости величинами, невозможно в полной мере получить корректное воспроизведение пространственно-временного изменения турбулентных параметров потока [155].

Суммируя вышеизложенное, можно заключить, что стационарные расчёты приводят к более длинному следу за кубом из-за того, что они упускают важную компоненту осреднённого течения – периодический характер образования циркуляций в следе.

2.7 Обтекание расположенных последовательно по потоку двух кубов

Скорость набегающего потока в этом случае составляет $U = 8,8$ м/с, а интенсивность турбулентности $\sqrt{u'^2}/V$ менее 1,5 % [156]. Высота каждого куба $H=0,04$ м (рис. 2.15). Число Рейнольдса, вычисленное на основе значений высоты куба и скорости набегающего потока U , равно 22 000. Векторное поле осреднённой скорости в плоскости симметрии $z/H = 0$ и в горизонтальной плоскости $y/H=0,375$ представлено на рис. 2.16 и 2.17 соответственно. На рисунках стенка – это твёрдая граница вдоль $y/H = 0$, крышка куба – это грань вдоль $y/H = 1$, левая и правая грани куба вдоль $z/H = -0,5$ и $z/H = 0,5$ соответственно.

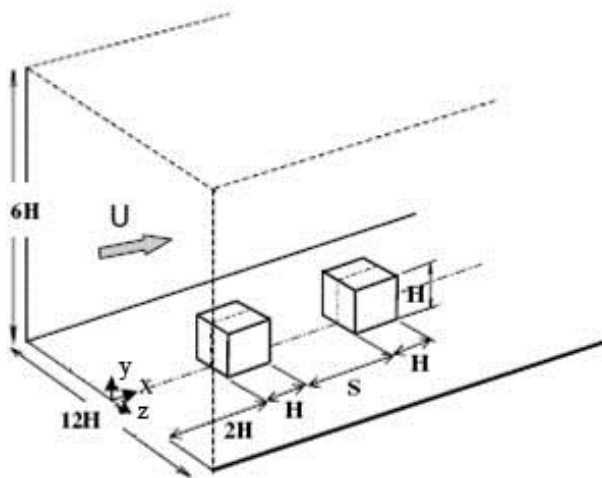
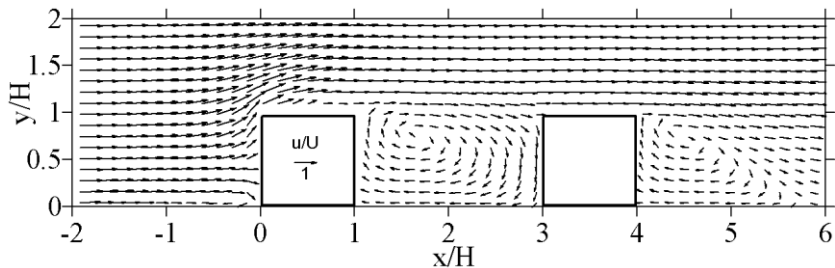
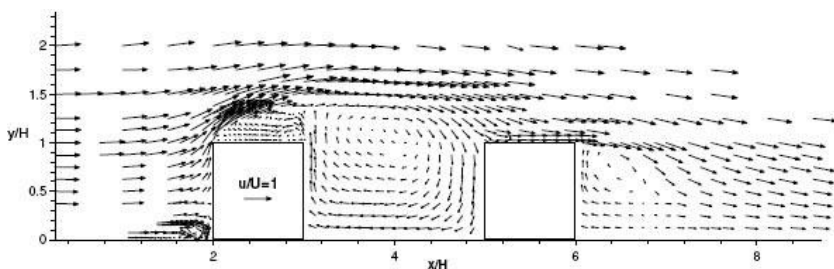


Рисунок 2.15 – Схематичное представление расчётной (экспериментальной) области

Из рис. 2.16, *a*, *б* видно, что имеют место сильные градиенты скорости и разделение потока на фронтальной грани первого куба. Существует сильное вертикальное течение, которое направлено вдоль фронтальной грани первого куба. Кроме того, наблюдаются рециркуляционные течения между двумя кубами и после второго куба, а также на верхней грани первого куба.



а)

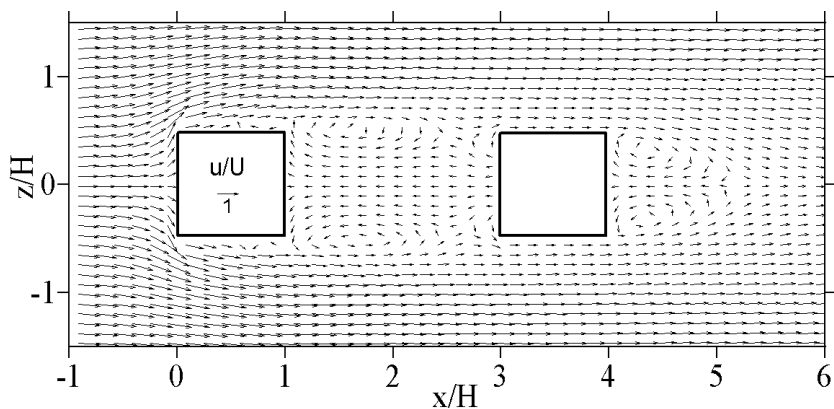


б)

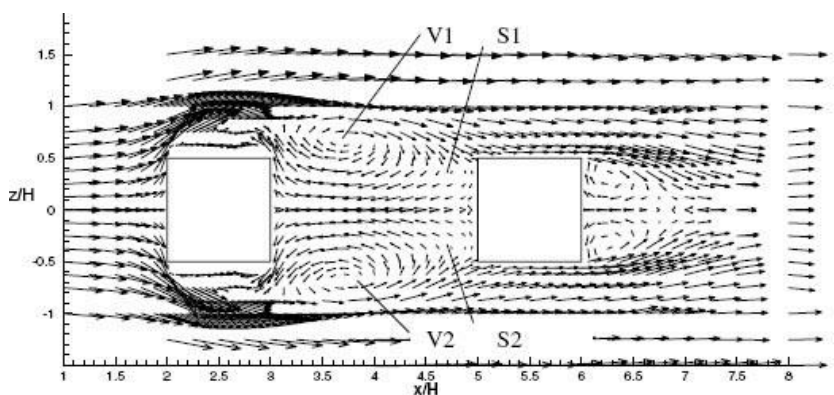
Рисунок 2.16 – Векторное поле скорости в плоскости симметрии, $z/H = 0$:
 a – расчёт, b – эксперимент [156]

В горизонтальной плоскости (рис. 2.17, a , b) видно два больших вихря между двумя кубами, вращающихся в противоположных направлениях, с центрами в точках $V1$ и $V2$, а также с двумя седловыми точками $S1$ и $S2$. Подобное течение наблюдается и за вторым кубом.

Векторное поле скорости, рассчитанное по « k - ϵ »-модели, удовлетворительно согласуется с экспериментально найденным полем скорости. В расчётах также наблюдаются основные зоны рециркуляции между двумя препятствиями и после второго куба, а также слабые вторичные рециркуляции. Тем не менее видно, что обычная « k - ϵ »-модель турбулентности с замыкающими соотношениями Буссинеска, в отличие от NLEVM-модели, не совсем адекватно описывает вторичные рециркуляции на боковых гранях первого препятствия и на его крышке, некоторым образом уменьшая их размер, как и в случае обтекания одного куба.



a)



б)

Рисунок 2.17 – Векторное поле скорости в горизонтальной плоскости $y/H=0,375$:
a – расчёт, *б* – эксперимент [156]

2.8 Расчёт зависимости концентрации в уличном каньоне от направления ветра

В данном тестовом расчёте была вычислена зависимость безразмерной концентрации примеси в каньоне от направления ветра и проведено сравнение полученных результатов с другими подобными моделями, а также с экспериментальными данными, представлен-

ными в работе [40]. Влияние движущегося автотранспорта не учитывается. В расчётах профиль скорости на входе имеет следующее распределение: $U = U_{H_{ref}} \sin(\alpha)$, а кинетическая энергия $k = 0,12 \text{ м}^2/\text{с}^2$ и диссипация $\varepsilon = 0,3644/(z - 16) \text{ м}^2/\text{с}^3$.

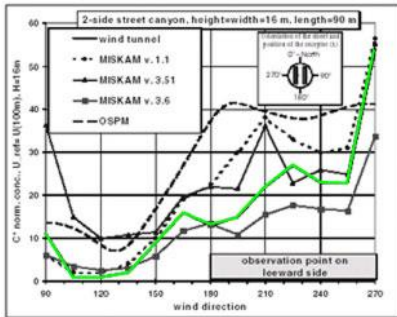


Рисунок 2.18 – Зависимость безразмерной концентрации для идеального уличного каньона от направления ветра. График взят из работы [40]

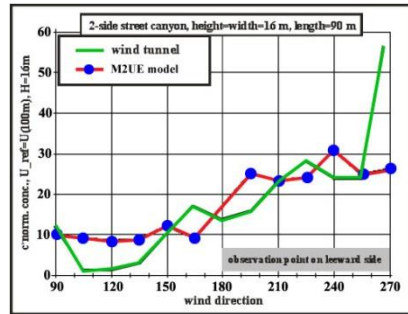


Рисунок 2.19 – Зависимость безразмерной концентрации от направления ветра, для расчётов использовалась NLEVM

Разностная сетка имеет размер 100×100 узлов. Безразмерная концентрация определяется как $C^* = CU_{H_{ref}}H/(Q/L)$, где C – максимальная концентрация на левой стенке каньона; $U_{H_{ref}} = 10 \text{ м/с}$ – скорость на высоте H_{ref} (например, 100 м); H – характерная высота (например, средняя высота зданий 16 м) и (Q/L) – интенсивность источника загрязнения, который располагается на дне городского каньона.

Для сравнения результатов численных расчётов выбирались следующие модели: MISKAM 1.1 (Microscale Flow and Dispersion Model – двумерная микромасштабная модель течения и переноса примеси), MISKAM 3.51, MISKAM 3.6 (трёхмерные микромасштабные модели течения и переноса примеси, <http://www.lohmeyer.de/FrameSeiteAerodynamik.htm>), OSPM (Danish Operational Street Pollution Model – двумерная модель загрязнения городского уличного каньона, http://www2.dmu.dk/1_Viden/2_Miljoe-tilstand/3_luft/4_spredningsmodeller/5_OSPM/default_en.asp).

На рис. 2.18 показаны результаты, полученные для «идеальной» формы каньона длиной 90 м, шириной и высотой 16 м. По причинам симметрии представлены измерения по направлениям от 90 до 270°, причём 180° соответствует потоку, параллельному улице. Наилучшее согласие с результатами, полученными в аэродинамической трубе [40], показала модель MISKAM версия 1.1.

Новейшие версии модели MISKAM дают как очень большие значения концентрации на наветренной стороне (90°, версия 3.51), так и очень малые – на подветренной (270°, версия 3.6) (по сравнению с экспериментом). Модель OSPM даёт завышенные значения за исключением направления 270°, где чётко выраженный максимум не достигается. Выполненные с помощью модели (2.1)–(2.8) вычисления (результат показан на рис. 2.19) наглядно демонстрируют, что самое малое значение концентрации имеет место на наветренной стороне. Необходимо отметить, что в целом наблюдается хорошая корреляция результатов, полученных в работе [40], с проведёнными здесь вычислениями.

Суммируя изложенные выше результаты сравнения расчётов с экспериментальными данными и теоретическими данными других авторов, можно сделать вывод, что предложенная математическая модель удовлетворительно описывает процессы течения жидкости в областях со сложной геометрией и распространение примеси в городской застройке. Кроме того, апробирована параметризация городской растительности на основе экспериментальных данных. Базируясь на анализе осреднённых характеристик потока и турбулентной структуры течения, осуществлён выбор NLEVM-модели турбулентности как в большей мере подходящей для параметрического исследования движения воздушных масс в городском уличном каньоне и распространения выбросов загрязняющих веществ от автотранспорта.

2.9 Численное исследование движения воздуха и переноса примеси в уличном каньоне в двумерной постановке

Предложенная математическая модель была применена для исследования аэродинамики потока и переноса примеси, поступающей от движущегося автотранспорта, в элементах городской застройки.

Расчеты проводились на сетке размером 161×121 . Источники поступления примеси постоянной интенсивности располагались вблизи поверхности на высоте $h_S = 0,5$ м. В расчётах скорость движения автотранспорта принималась равной $V_{car} = (0,0,10)$, а интенсивность движения автомобилей $Q_{car} = 0,5 \text{ с}^{-1}$. Расположение источников выброса загрязнения совпадает с местоположением источников механической турбулентности.

Ниже представлены линии тока, векторные поля и изолинии концентраций при различных конфигурациях и условиях движения воздушных масс в уличном каньоне.

Рассматривались следующие варианты.

I. Исследование влияния механической турбулентности:

1) $W=30$ м; $H=30$ м; $U_{ref} = 1$ м/с; источник механической турбулентности в точке $x = 35$, $y = h_S$ (рис. 2.20, *a, b*); W, H – ширина и высота каньона;

2) $W=30$ м; $H=30$ м; $U_{ref} = 1$ м/с; источник механической турбулентности в точке $x = 55$, $y = h_S$ (рис. 2.20, *c, d*);

3) $W=30$ м; $H=30$ м; $U_{ref} = 1$ м/с; источники механической турбулентности в точках $x = 35$, $y = h_S$, $x = 55$, $y = 0$ (рис. 2.20, *e, f*).

II. Исследование влияния растительности и механической турбулентности (растительный массив занимает область $42,5 \text{ м} \leq x \leq 47,5 \text{ м}$; $1 \text{ м} \leq y \leq 16 \text{ м}$):

4) $W=30$ м; $H=30$ м; $U_{ref} = 1$ м/с; источник выброса примеси в точке $x = 35$, $y = h_S$ (рис. 2.21, *a, b*);

5) $W=30$ м; $H=30$ м; $U_{ref} = 1$ м/с; источник выброса примеси в точке $x = 55$, $y = h_S$ (рис. 2.21, *c, d*);

6) $W=30$ м; $H=30$ м; $U_{ref} = 1$ м/с; источники выброса примеси в точках $x = 35$, $y = h_S$, $x = 55$, $y = h_S$ (рис. 2.21, *e, f*).

III. Исследование влияния скорости ветра (источники механической турбулентности в точках $x = 35$, $y = h_S$, $x = 55$, $y = 0$):

7) $W=30$ м; $H=30$ м; $U_{ref} = 2$ м/с (рис. 2.22, *a, b*);

8) $W=30$ м; $H=30$ м; $U_{ref} = 4$ м/с (рис. 2.23, *a, b*).

IV. Исследование влияния геометрии каньона (источник примеси и механической турбулентности находится в центре уличного каньона в точке $x = 45$ м, $y = h_S$):

9) $W=20$ м; $H=10$ м; $U_{ref} = 2$ м/с (рис. 2.24, 2.25);

10) $W=20$ м; $H=5$ м; $U_{ref} = 2$ м/с (рис. 2.26, 2.27);

- 11) $W=40$ м; $H=5$ м; $U_{ref} = 2$ м/с (рис. 2.28, 2.29);
- 12) $W=40$ м; $H=5$ м; $U_{ref} = 2$ м/с; растительный массив занимает область $40 \text{ м} \leq x \leq 50 \text{ м}$; $1 \text{ м} \leq y \leq 10 \text{ м}$; источник загрязнения в точке $x=32,5$ м, $y=h_S$ (рис. 2.30, 2.31);
- 13) отдельно стоящее здание высотой $H=30$ м; $U_{ref} = 1$ м/с; источник загрязнения в точке $x=45$ м, $y = h_S$ (рис. 2.32);
- 14) отдельно стоящее здание высотой $H=30$ м; $U_{ref} = 1$ м/с; источник загрязнения в точке $x=20$ м, $y = h_S$ (рис. 2.33);
- 15) отдельно стоящее здание высотой $H=30$ м; источник загрязнения в точке $x=45$ м, $y=h_S$; $U_{ref} = 1$ м/с; растительный массив располагается в области $25 \text{ м} \leq x \leq 40 \text{ м}$; $1 \text{ м} \leq y \leq 16 \text{ м}$ (рис. 2.34);
- 16) отдельно стоящее здание высотой $H=30$ м; $U_{ref} = 1$ м/с; источник загрязнения в точке $x=20$ м, $y = h_S$; растительный массив $25 \text{ м} \leq x \leq 40 \text{ м}$; $1 \text{ м} \leq y \leq 16 \text{ м}$ (рис. 2.35).

Результаты расчётов показывают, что в каньоне образуется вращательное движение воздуха, направление и интенсивность которого определяются значением скорости основного потока. Увлекаемая вращательным движением воздуха примесь, которая поступает из источников, расположенных на дне каньона, переносится к подветренной стороне и далее отчасти выносится в основной поток, отчасти возвращается в область, ограниченную вертикальными стенками близкостоящих зданий (см. рис. 2.20). Скорость рециркуляционного потока в каньоне существенно ниже скорости воздуха над зданиями, что способствует образованию повышенного уровня содержания примеси во всём объёме каньона и особенно вблизи источников выбросов и у подветренной стороны каньона. Кинетическая энергия турбулентности в каньоне имеет минимальные значения, но если учесть эффект, производимый источниками механической турбулентности, то величина энергии k возрастёт у дна каньона, однако с увеличением высоты её значения уменьшаются.

Необходимо отметить, что наибольшее локальное значение концентрации загрязнителя (см. рис. 2.20, *a-d*) достигается в том случае, когда источник механической турбулентности и источник примеси находятся у левой образующей каньона (см. рис. 2.20, *a, b*). Это происходит из-за того, что степень рассеяния примеси возрастает с увеличением расстояния от источника выброса (см. рис. 2.20, *c, d*), поскольку турбулентная диффузия способствует более интенсивному перемешиванию.

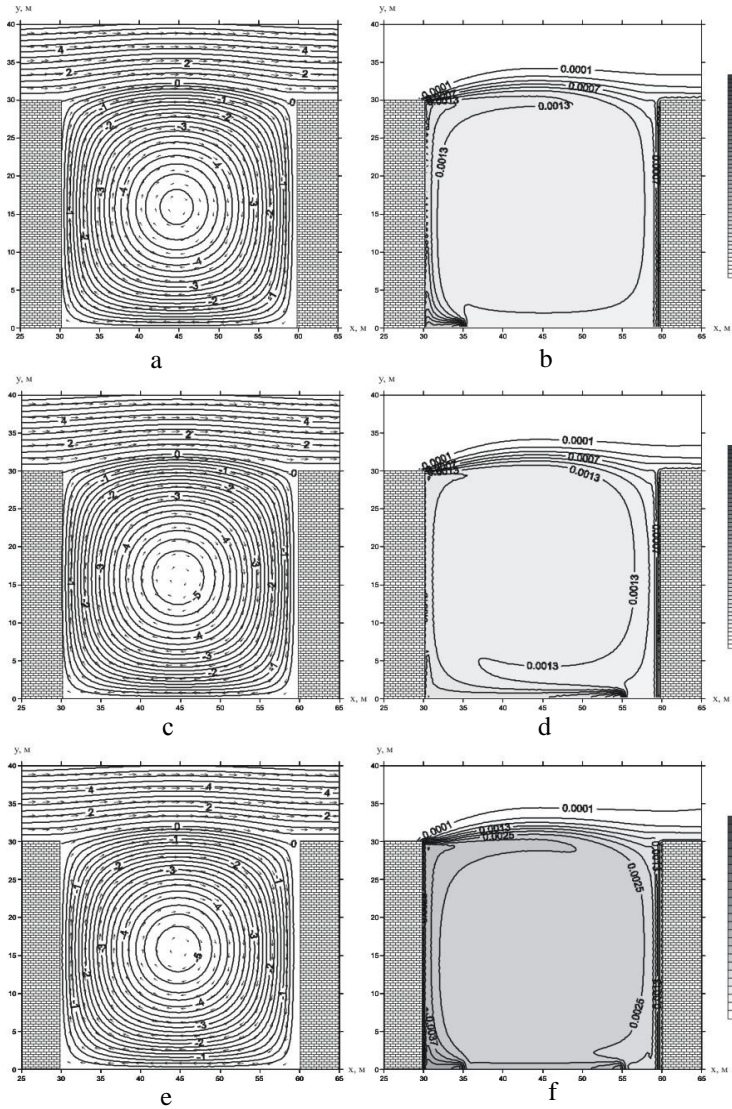


Рисунок 2.20 – Линии тока и векторное поле скорости (слева), изолинии концентрации примеси (справа). $W=30$ м; $H=30$ м; $U_{ref}=1$ м/с.

Источники механической турбулентности и примеси в точках:

$$a, b - x = 35, y = h_S; c, d - x = 55, y = h_S; e, f - x = 35, y = h_S, x = 55, y = h_S$$

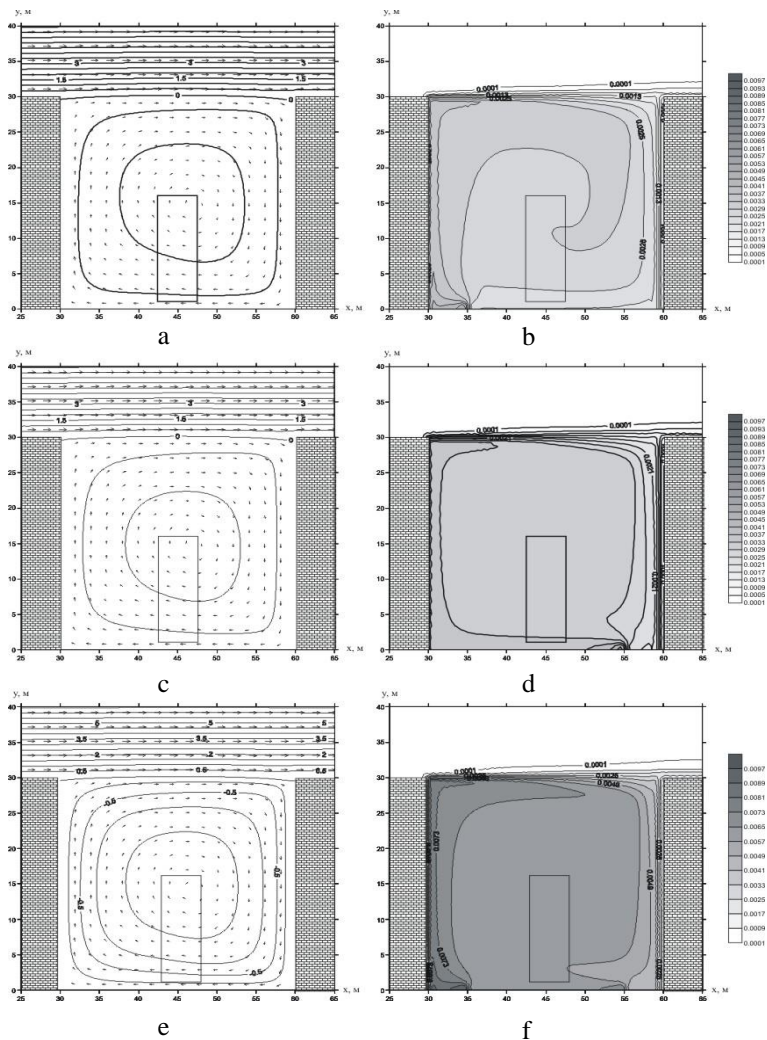


Рисунок 2.21 – Линии тока и векторное поле скорости (слева), изолинии концентрации примеси (справа). $W=30$ м; $H=30$ м; $U_{ref}=1$ м/с. Источники механической турбулентности и примеси в точках: $a, b - x = 35, y = h_S$; $c, d - x = 55, y = h_S$; $e, f - x = 35, y = h_S$, $x = 55, y = h_S$; \square – растительный массив

В случае, когда источник механической турбулентности находится у левой образующей каньона, примесь в меньшей степени рассеивается и в основном выносится потоком из уличного каньона. Поэтому в нижней части каньона наблюдается более низкий уровень концентрации примеси (см. рис. 2.20, *a, b*).

Наличие небольшого массива растительности (например, несколько сосновых деревьев, $\eta = 1$, $C_d = 0,2$, $a = 0,3125 \text{ м}^2/\text{м}^3$), расположенного в центре уличного каньона (рис. 2.21, *a-f*; $42,5 \text{ м} \leq x \leq 47,5 \text{ м}$; $1 \text{ м} \leq y \leq 16 \text{ м}$), при остальных неизменных параметрах расчета приводит к существенному снижению скорости вращательного движения из-за увеличения сопротивления потоку. Кроме того, появление пронизаемого препятствия в уличном каньоне выражается в деформации линий тока в массиве растительности и за ним, связанной с подъемным движением воздуха, прошедшего у основания преграды. Интенсивность вентиляции уличного каньона снижается, что приводит к повышению уровня концентрации примеси во всем объеме каньона, особенно у подветренной стороны. Дополнительному рассеянию примеси также способствует интенсификация турбулентного переноса, обусловленная изменением характера рециркуляционного движения, выражающегося в подъеме турбулизованного загрязненного потока за пронизаемой преградой.

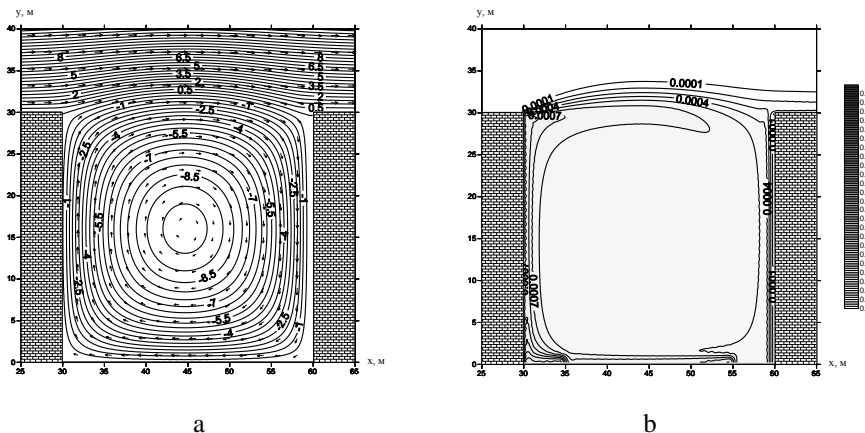
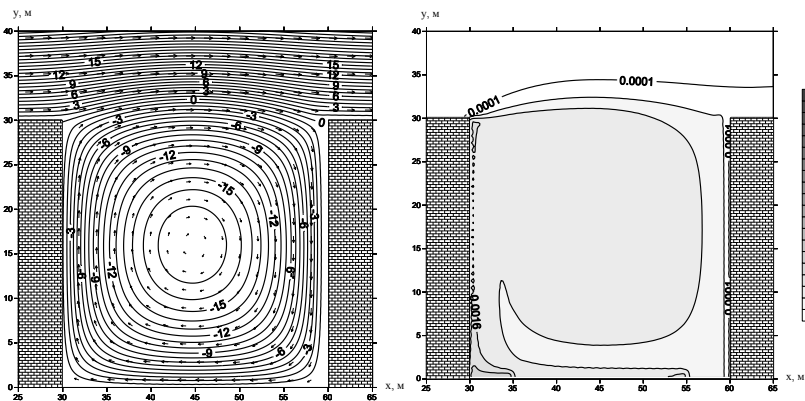


Рисунок 2.22 – Линии тока (*a*) и распределение концентрации примеси (*b*). $W=30 \text{ м}$; $H=30 \text{ м}$; $U_{ref} = 2 \text{ м/с}$; источники выброса примеси в точках $x = 35$, $y = h_s$, $x = 55$, $y = h_s$



а б
 Рисунок 2.23 – Линии тока (а) и распределение концентрации примеси (б). $W=30$ м; $H=30$ м; $U_{ref} = 4$ м/с; источники выброса примеси в точках $x = 35, y = h_s, x = 55, y = h_s$

Скорость ветра над уличным каньоном влияет на величину загрязнения в нём – чем больше скорость набегающего потока, тем меньше концентрации в каньоне (рис. 2.22, 2.23). Следует отметить, что изменение объёма уличного каньона также оказывает влияние на уровень загрязнения воздуха в нём [149], однако локальные максимальные значения концентрации загрязняющих веществ постоянно фиксируются у подветренной стороны каньона.

Важно также отметить, что геометрические параметры уличного каньона оказывают существенное воздействие на вид течения и уровень загрязнения. Отношение размеров каньона $H/W = 0,5$ (см. рис. 2.24, 2.25) характеризуется растяжением вихря вдоль уличного каньона и увеличением концентрации с подветренной стороны. Если же рассмотреть отношение $H/W = 0,25$ (см. рис. 2.26, 2.27), то мы видим, что центр основного вихря сместился к наветренному зданию. Это привело к ещё большему возрастанию локальных значений концентрации вследствие снижения интенсивности движения воздушных масс у подветренной стороны каньона. Дальнейшее увеличение расстояния между зданиями ($H/W = 0,125$) приводит к образованию двух рециркуляционных зон: большой вихрь у подветренной

стороны и малый у наветренной (см. рис. 2.28, 2.29). В этом случае примесь, поступающая от источника, расположенного в центре уличного каньона, уносится в сторону подветренного здания, циркулируя и накапливаясь вблизи него. Таким образом, показано, что существует три основных режима течения в уличном каньоне [149]:

- 1) вихрь расположен в центре уличного каньона ($H/W > 0,7$);
- 2) вихрь вытягивается и смещается к наветренной стороне каньона ($0,3 < H/W < 0,7$);
- 3) образуются две рециркуляционные зоны – большая у подветренной и малая у наветренной стороны каньона ($H/W < 0,3$).

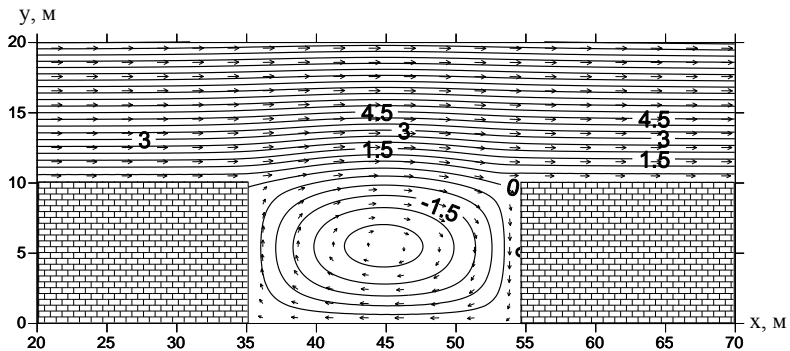


Рисунок 2.24 – Линии тока. Источник примеси и механической турбулентности находится в центре уличного каньона в точке $x = 45$ м, $y = h_s$. $W=20$ м; $H=10$ м; $U_{ref} = 2$ м/с

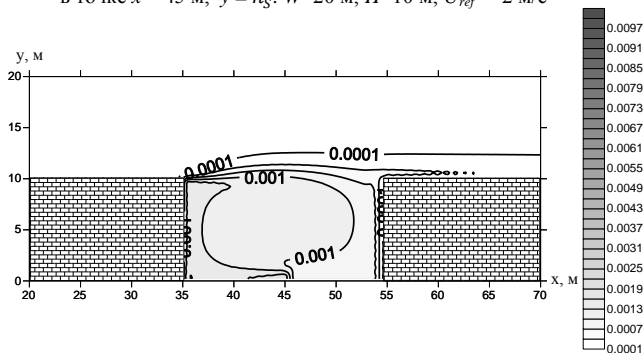


Рисунок 2.25 – Изолинии концентрации. Источник примеси и механической турбулентности находится в центре уличного каньона в точке $x = 45$ м, $y = h_s$. $W=20$ м; $H=10$ м; $U_{ref} = 2$ м/с

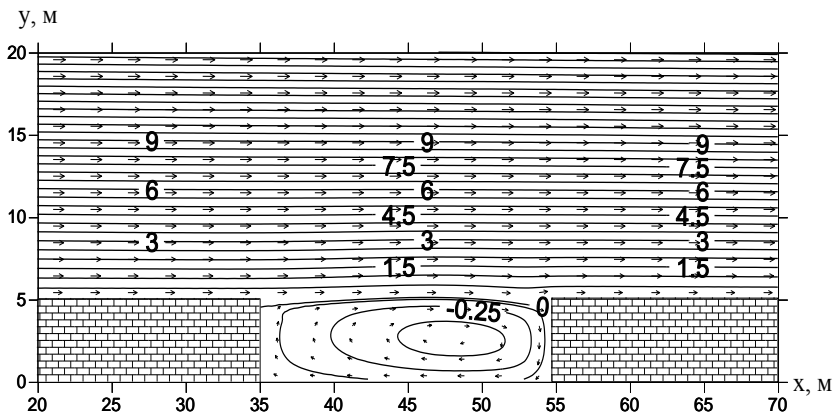


Рисунок 2.26 – Линии тока. Источник примеси и механической турбулентности нанос ходится в центре уличного каньона в точке $x = 45$ м, $y = h_s$. $W=20$ м; $H=5$ м; $U_{ref} = 2$ м/с

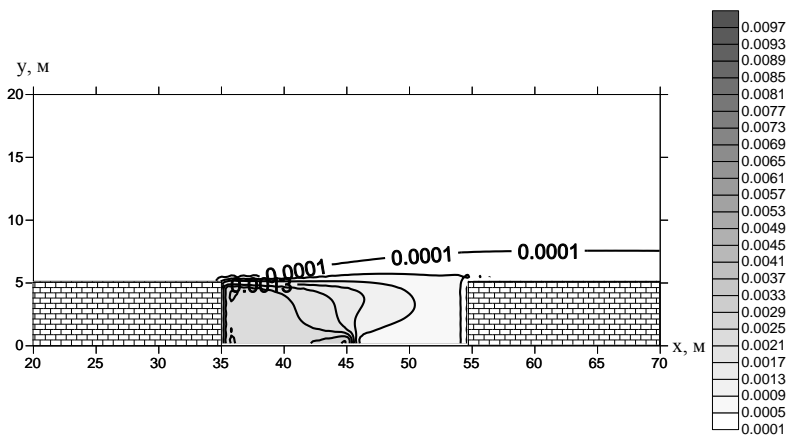


Рисунок 2.27 – Изолинии концентрации. Источник примеси и механической турбулентности находится в центре уличного каньона в точке $x = 45$ м, $y = h_s$. $W=20$ м; $H=5$ м; $U_{ref} = 2$ м/с

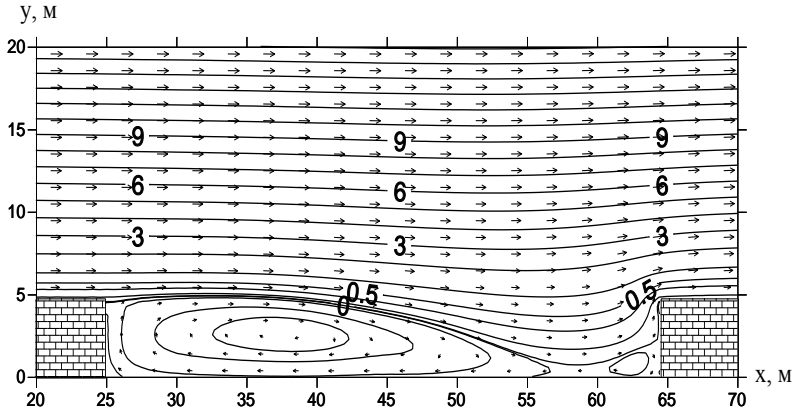


Рисунок 2.28 – Линии т ока. Источник примеси и механической турбулентности находится в центре уличного каньона в точке $x = 45$ м, $y = h_s$, $W=40$ м;
 $H=5$ м; $U_{ref} = 2$ м/с

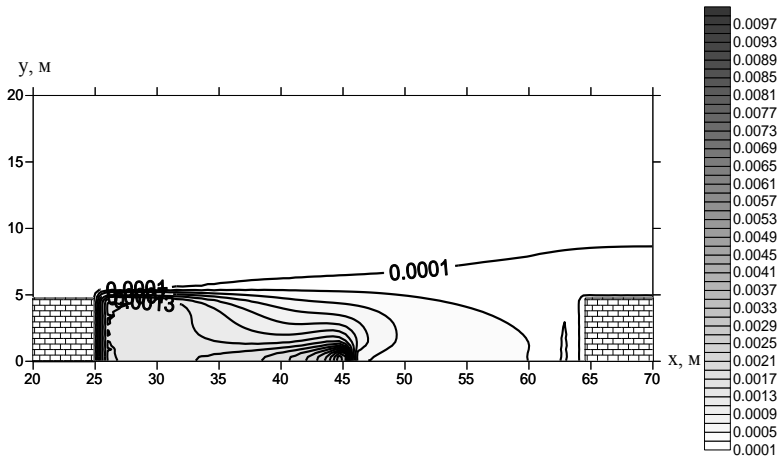


Рисунок 2.29 – Изолинии концентрации. Источник примеси и механической турбулентности находится в центре уличного каньона в точке $x = 45$ м, $y = h_s$.
 $W=40$ м; $H=5$ м; $U_{ref} = 2$ м/с

Наличие растительности в каньоне с отношением $H/W = 0,125$ приводит к уменьшению рециркуляционной зоны у подветренного здания вследствие того, что растительность оказывает сопротивление движению воздушных масс. Кроме того, происходит исчезновение малого вихря, так как растительность стабилизирует набегающий поток (см. рис. 2.30, 2.31).

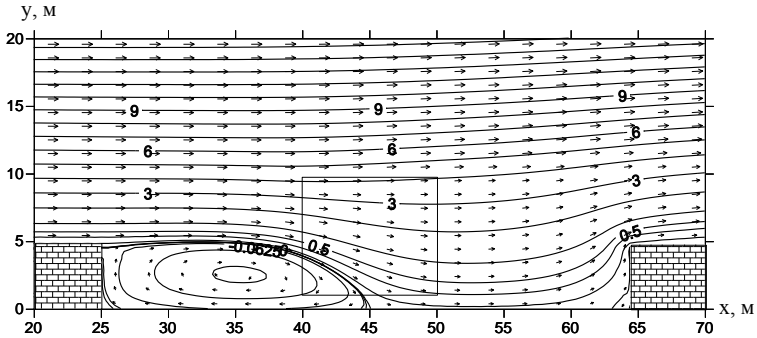


Рисунок 2.30 – Линии тока. Источник примеси и механической турбулентности находится в центре уличного каньона в точке $x = 45$ м, $y = h_g$. $W=40$ м; $H=5$ м; $U_{ref} = 2$ м/с;
 □ – растительный массив

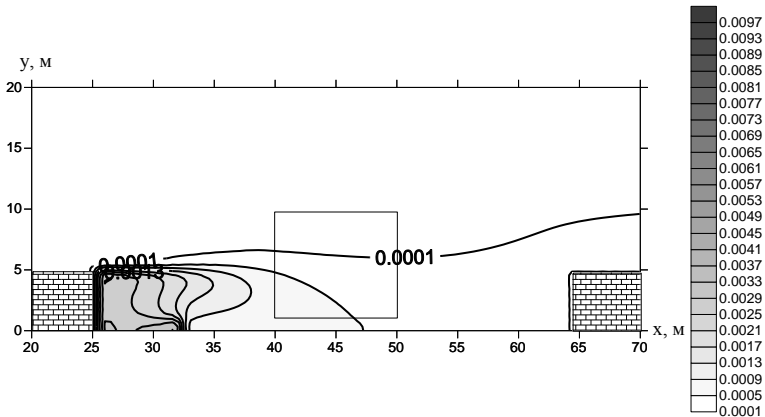
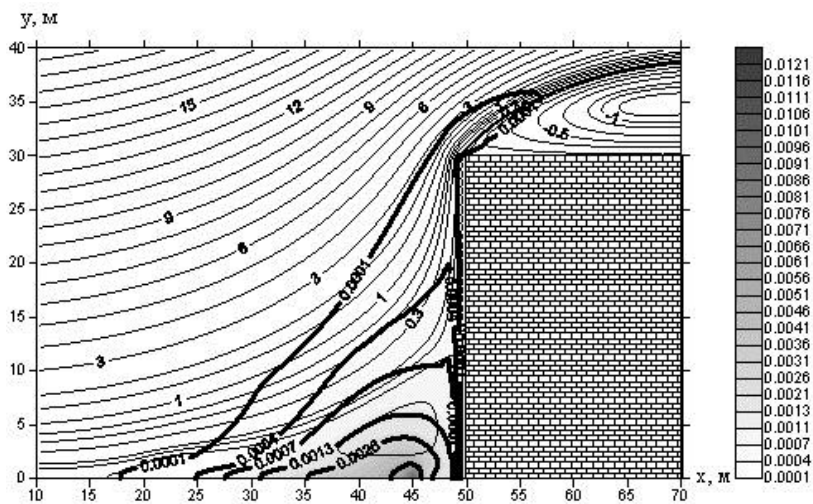


Рисунок 2.31 – Изолинии концентрации. Источник примеси и механической турбулентности находится в центре уличного каньона в точке $x = 32,5$ м, $y = h_g$.
 $W=40$ м; $H=5$ м; $U_{ref} = 2$ м/с; □ – растительный массив



На рис. 2.32 представлены линии тока и изолинии концентрации примеси в потоке, обтекающем протяженное здание. Источник поступления примеси располагается на расстоянии 5 м от препятствия. Результаты расчётов показали, что в потоке образуются две обширные рециркуляционные зоны: внизу у наветренной стороны здания и над зданием вниз по потоку. Наибольшие значения концентрации газообразной примеси наблюдаются, когда автотрасса расположена вблизи наветренной стороны здания. Это объясняется тем, что в области рециркуляционного течения скорость движения воздушных масс и турбулентная диффузия существенно меньше, чем в набегающем потоке, а также благодаря вихревому движению, из-за которого примесь постоянно циркулирует в этой области течения и выносится из неё лишь частично. Если же источник загрязнения находится вверх по потоку ($x \leq 20$ м), то это приводит к более интенсивному рассеиванию примеси над зоной рециркуляции, так как на данном участке течения турбулентная диффузия велика (см. рис. 2.33).

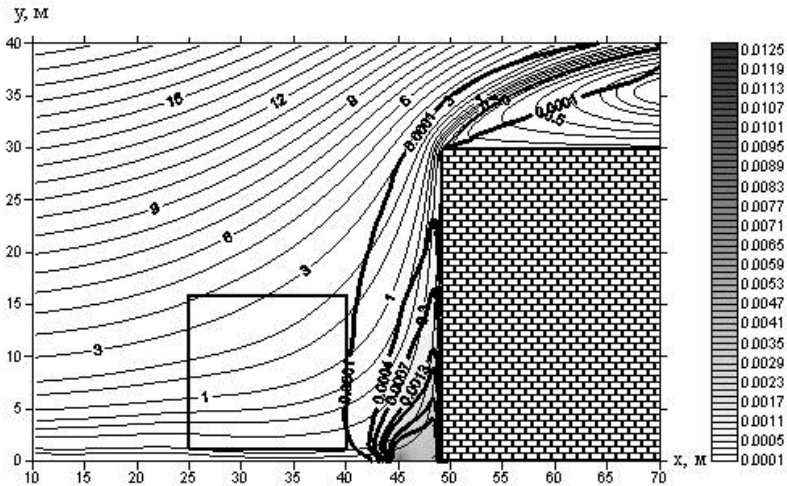


Рисунок 2.34 – Линии тока и изолинии концентрации примеси. $U_{ref} = 1$ м/с.
Источник загрязнения в точке $x = 45$ м, $y = h_s$; □ – растительный массив

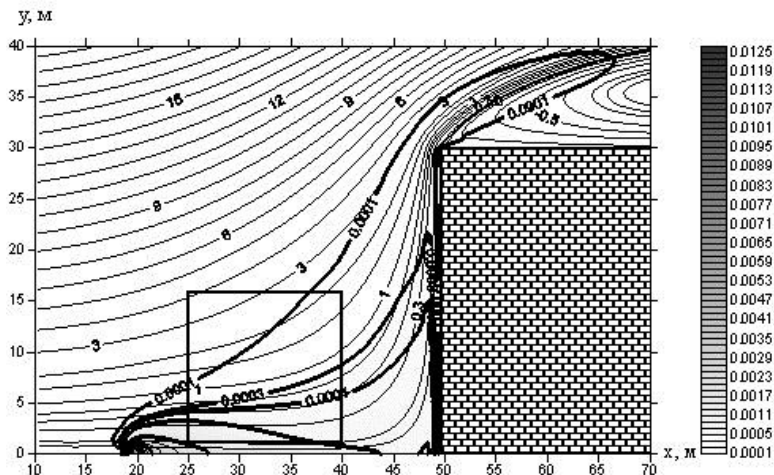


Рисунок 2.35 – Линии тока и изолинии концентрации примеси. $U_{ref} = 1$ м/с. Источник загрязнения в точке $x = 20$ м, $y = h_s$; □ – растительный массив

Наличие ограниченной зоны растительности (рис. 2.34, $25 \text{ м} \leq x \leq 40 \text{ м}$; $1 \text{ м} \leq y \leq 16 \text{ м}$; массив сосновых деревьев, $\eta = 1$, $C_d = 0,2$, $a = 0,3125 \text{ м}^2/\text{м}^3$) перед зданием приводит к изменению аэродинамической картины течения. Проницаемая преграда стабилизирует набегающий поток и тем самым предотвращает условия образования обширной зоны рециркуляции течения перед зданием. Вследствие этого примесь, в основном, выносится вертикальным потоком и размеры области ее рассеяния становятся существенно меньше. Поэтому уровень загрязнения воздуха вблизи источника при рассматриваемых условиях выше по сравнению с ситуацией, показанной на рис. 2.32. Наличие источника загрязнения вверх по потоку ($x \leq 20 \text{ м}$), а также зоны растительности (рис. 2.35, $25 \text{ м} \leq x \leq 40 \text{ м}$; $1 \text{ м} \leq y \leq 16 \text{ м}$; массив сосновых деревьев, $\eta = 1$, $C_d = 0,2$, $a = 0,3125 \text{ м}^2/\text{м}^3$) приводит к более интенсивному рассеиванию примеси перед ней. Тем не менее наблюдается увеличение концентрации примеси (по сравнению с расчётами на рис. 2.33) из-за снижения скорости движения воздушных масс вследствие увеличения сопротивления потоку.

2.10 Расчет пространственной аэродинамики и переноса примеси в районе ул. Гёттенгер в г. Ганновер

Осознавая важность тестирования математических моделей для решения задачи распространения примесей в городской застройке, группа ученых, работавшая по проекту TRAPOS (Optimisation of Modelling Methods for Traffic Pollution in Streets) с 1997 по 2001 г. [40], инициировала организацию проведения сравнительного анализа и подготовила ряд тестовых случаев, которые предусматривают сопоставление численных результатов с экспериментальными данными. Наиболее сложным среди них было исследование аэродинамики и переноса примеси на участке городской застройки, окружающем ул. Гёттингер в г. Ганновер. Для этой задачи доступны полевые измерения и лабораторные данные [41] для концентрации примеси в одной точке вблизи источников выбросов, а также метеорологические данные над крышей самого высокого здания (рис. 2.36).

В соответствии с данными полевых измерений профили и характерные величины актуальных параметров в расчётной области были следующие (http://www2.dmu.dk/atmosphericenvironment/Trapos/Downloads/Goe_case.doc):

– характерная высота, скорость и высота шероховатости на твёрдых поверхностях:

$$H_{ref} = 100 \text{ м}, U_{H_{ref}} = 10 \text{ м/с}, z_0 = 0,01 \text{ м};$$

– динамическая скорость и постоянная Кармана:

$$u_* = 0,53 \text{ м/с}, \kappa = 0,4;$$

– профили скорости во входной области:

$$u = u_* / \kappa \ln(z/z_0), U = \cos(\alpha) \cdot u, V = -\sin(\alpha) \cdot u,$$

где α – угол между направлением ветра и осью Ox (см. рис. 2.36);

– профили турбулентной кинетической энергии и диссипации во входной области:

$k = k_L(z)$ и $\varepsilon = \varepsilon_L(z)$, где функции $k_L(z)$ и $\varepsilon_L(z)$ брались из [41].

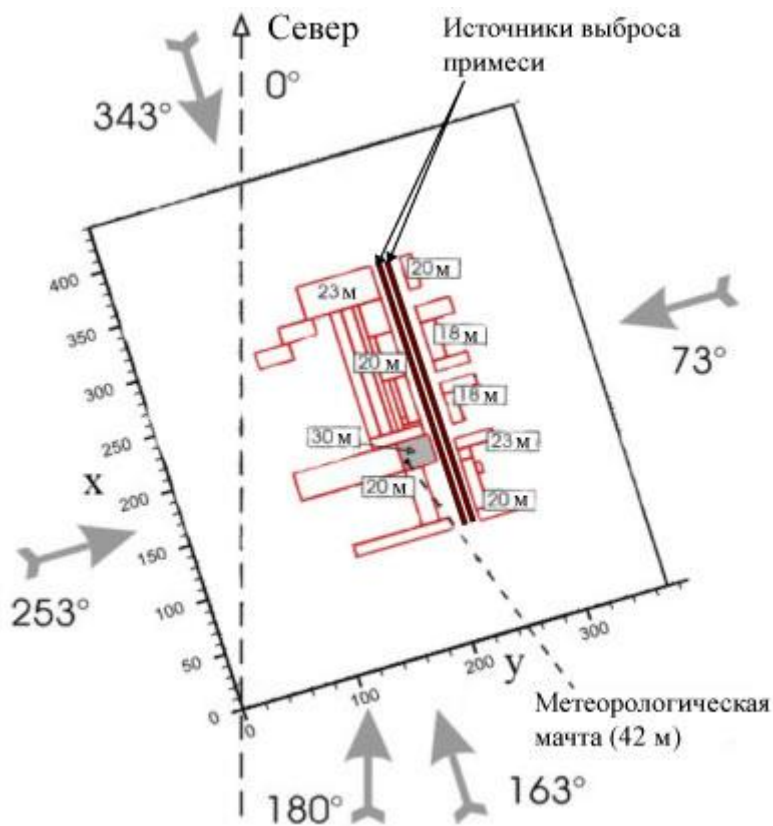


Рисунок 2.36 – Схема расчётной области

Векторное поле горизонтальной компоненты скорости и безразмерная концентрация примеси $C^* = CU_{H_{ref}}H/(Q/L)$ представлены на рис. 2.37 (где $U_{H_{ref}} = 10$ м/с – характерная скорость на высоте 100 м; $H = 20$ м – средняя высота здания, $L=180$ м – длина линейного источника; Q – интенсивность выбросов автотранспорта).

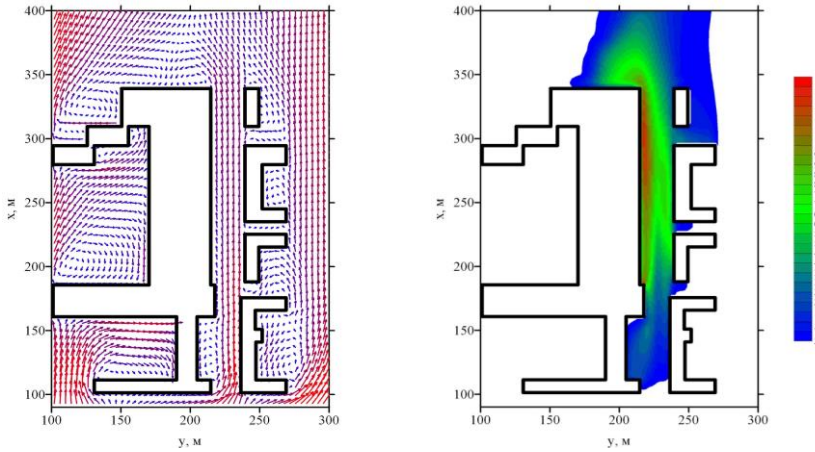


Рисунок 2.37 – Векторное поле скорости (слева) и изолинии безразмерной концентрации (справа) на расстоянии от поверхности $z = 3$ м

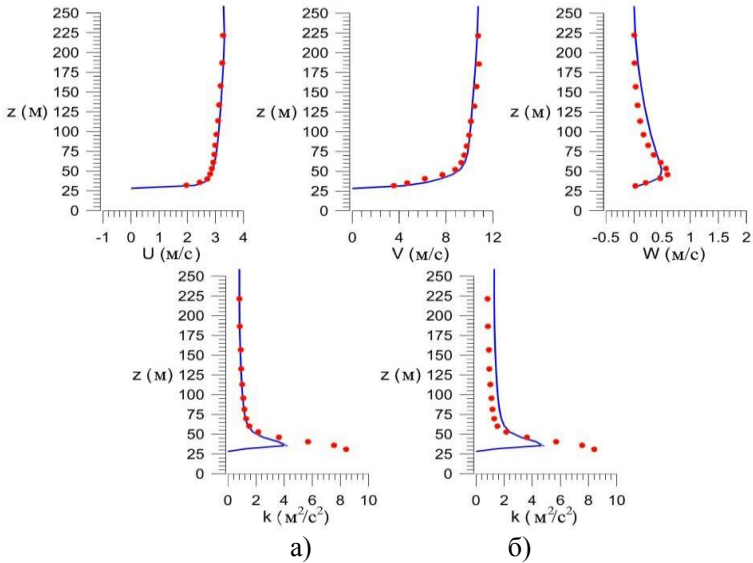


Рисунок 2.38 – Компоненты вектора скорости и кинетическая энергия турбулентности: — расчёт, ● – эксперимент [157]; а – без источника механической турбулентности, б – с источником механической турбулентности

Набегающий поток имеет направление движения с юга на север ($\alpha = 180^\circ$). Геометрическая модель для расчёта в данной работе является точной копией ул. Гёттингер. Расчёты показывают сложное турбулентное движение воздушных масс (рис. 2.37). Видно образование вихревых структур вблизи углов зданий, как и вовлечение воздушных масс в рециркуляционное движение с противоположной стороны улицы, что приводит к накоплению выбросов от автотранспорта. Однако при таком направлении движения основного воздушного потока примесь, поступающая с выхлопами автотранспорта, практически не попадает во внутренние дворы, а сносится потоком вдоль улицы с повышением концентрации у левой стороны автотрассы.

На рис. 2.38 представлены результаты сравнения между рассчитанными и измеренными значениями вектора скорости и турбулентной кинетической энергии в области, где установлена метеорологическая мачта (см. рис. 2.36). Из расчётов видно, что существует небольшое завышение W компоненты скорости, в то время как остальные компоненты практически идеально совпадают с измерениями. Однако в области, близкой к крыше самого высокого здания, где экспериментальные данные показывают высокие уровни k , наблюдается занижение рассчитанной турбулентной кинетической энергии (рис. 2.38, *a*). Добавление источникового члена (рис. 2.38, *b*), который моделирует генерацию энергии турбулентности автотранспортом, приводит к увеличению общего уровня турбулентности, хотя занижение k у крыши всё же остаётся.

2.11 Численное исследование движения воздуха и переноса примеси для условий MUST (Mock Urban Setting Trial) эксперимента

Наиболее очевидный способ понять основные физические процессы в действии для различных режимов распространения примеси в городской застройке – это осуществить экспериментальные исследования для течения вокруг простого массива препятствий. Такого рода эксперименты обычно включают исследование распространения примеси внутри массива из кубических или прямоугольных блоков с целью моделирования городского пограничного слоя с изменяющимися морфологическими свойствами. Несмотря на то, что

городские территории обладают более сложной геометрией, исследование таких упрощённых конфигураций позволяет изучить основные физические механизмы распространения вредных примесей. Для этих целей в книге используются результаты MUST (Mock Urban Setting Trial) эксперимента. К настоящему моменту существуют как натурные измерения [32], так и эксперименты на физических моделях в аэродинамических трубах [158] для геометрии MUST. Далее для анализа предложенной выше модели будем использовать экспериментальные данные, полученные в университете Гамбурга [38].

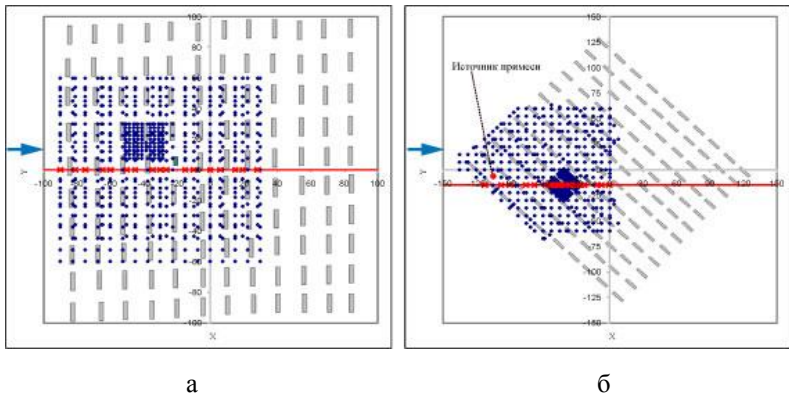


Рисунок 2.39 – Геометрия расчётной области MUST (массив из 120 контейнеров):
 • – расположение точек, в которых проводились измерения; — — линии в плоскости Oxy , вдоль которых ниже проводится сопоставление экспериментальных и расчётных данных;
 а – направление набегающего потока 0° ; б – направление набегающего потока – 45°

В натуральную величину массив прямоугольных блоков в MUST-эксперименте состоит из 120 (12×10) контейнеров, каждый из которых имеет высоту 2,54 м, ширину 2,42 м и длину 12,18 м. Контейнеры занимают площадь приблизительно 200×200 м. В центральной части массива один контейнер имеет другие размеры: высоту 3,51 м, ширину 2,44 м и длину 6,1 м. Масштаб этого массива блоков в аэродинамической трубе составляет 1:50. Контейнеры не образуют строго упорядоченную структуру, а имеют малое смещение в плоскости Oxy относительно друг друга. В данной книге рассматриваются два варианта расчёта аэродинамики для предложен-

ной геометрии: первый случай – набегающий поток направлен под углом -90° к массиву контейнеров (соответствует 0° , рис. 2.29, а) и второй вариант – под углом -45° (рис. 2.39, б). Источник выброса примеси присутствует только во втором расчётном случае и имеет координаты $x_S = -77,46$ м, $y_S = 67,47$ м, $z_S = 0$ м.

Набегающий поток соответствует условиям установившегося пограничного слоя и описывается следующими профилями [158]:

$$U(z) = U_{ref} \left(\frac{z}{z_{ref}} \right)^\alpha, \quad k(z) = \frac{u_*^2}{\sqrt{C_\mu}}, \quad \varepsilon(z) = \frac{u_*^3}{\kappa(z + z_0)},$$

где $\alpha = 0,16$, $u_* = 0,38$ м/с, $z_0 = 0,017$ м, $U_{ref} = 5,5$ м/с, $z_{ref} = 8,78$ м.

Безразмерная концентрация примеси вычисляется по формуле

$$C^* = \frac{C \cdot U \cdot L^2}{Q},$$

где C – концентрация примеси; $U = U_{ref}$ – характерная скорость; $L = z_{ref}$ – характерный масштаб задачи; Q – интенсивность источника.

Для того чтобы оценить качество предложенной модели, кроме её сравнения с экспериментом, было проведено сопоставление расчётов для рассматриваемой геометрии с результатами, полученными с помощью пакета вычислительной гидродинамики ANSYS Fluent (<http://ansys.com>). В качестве модели турбулентности в ANSYS Fluent были выбраны «к-ε»-модель, а также стандартный метод пристенных функций [148]. Расчёты выполнялись на блочно-структурированной сетке. Дискретизация конвективных членов для уравнения Навье–Стокса осуществлялась на основе схемы MUSCL (Monotone Upstream-Centered Schemes for Conservation Laws) [125], а для модели турбулентности использовалась противопотоковая схема второго порядка.

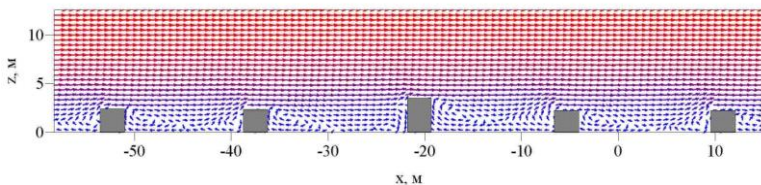


Рисунок 2.40 – (начало)

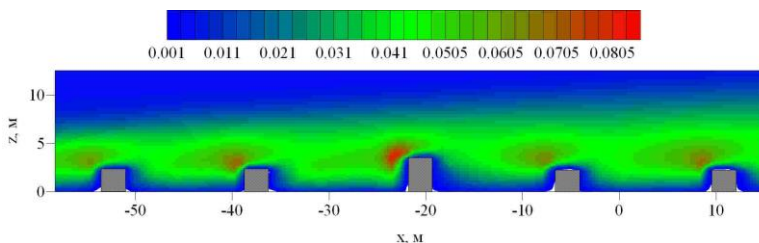


Рисунок 2.40 (окончание) – Векторное поле скорости и контурные линии кинетической энергии турбулентности в плоскости $y = 6$ м в центральной части расчётной области

Вычисления с помощью выбранных в данной работе версий «к-ε»-моделей (с градиентными соотношениями Буссинеска и NLEVM) проводились на сетке $186 \times 172 \times 47$ ячеек по осям x , y , z соответственно. В пакете вычислительной гидродинамики ANSYS Fluent использовалась блочно-структурированная сетка размером 1 480 000 конечных объёмов.

Из расчётов видно, что для направления потока 0° в массиве контейнеров образуются многочисленные вихревые области вниз по потоку (рис. 2.40, 2.41). Предложенная расчётная геометрия соответствует одному из базовых видов течения в городской застройке, а именно случаю $H/W < 0,3$, для которого характерно образование двух рециркуляционных зон – большой у подветренной и малой у наветренной стороны каньона. При таком характере течения оно относительно стабилизируется вниз по потоку между контейнерами. Однако когда поток воздуха встречается с преградой в виде следующего контейнера, происходит его разделение, которое сопровождается большими градиентами осреднённых параметров течения, а также процессом порождения кинетической энергии турбулентности на фронтальных углах контейнеров (рис. 2.42–2.44). Максимальные значения кинетической энергии турбулентности всегда наблюдаются на уровне крыш контейнеров (рис. 2.40, 2.43, 2.44, 2.47, 2.48). Следует отметить, что присутствие в центральной части массива препятствия контейнера с геометрией, отличной от других, существенно изменяет структуру течения. Сопоставление расчётных вертикальных профилей скорости показывает присутствие возвратного течения за нестандартным контейнером, однако результаты измерений говорят о его меньших размерах (см. рис. 2.44).

Несмотря на схожий характер течения в следе за контейнерами, существуют различия в структуре среднего поля скорости и величинах кинетической энергии турбулентности, которые определяются расположением однотипных контейнеров относительно друг друга. Так, например, в ряду контейнеров одинакового размера уровень кинетической энергии турбулентности увеличивается в следе вниз по потоку (см. рис. 2.40).

Графики сравнения экспериментальных и расчётных данных (см. рис. 2.42–2.44) показывают понижение кинетической энергии внутри области рециркуляций за контейнерами. Кроме того, видно строгое чередование максимумов и минимумов рассматриваемых величин, причем характер экстремума определяется тем, находится ли точка внутри зоны рециркуляции за контейнером или расположена за ней далее, вниз по потоку (см. рис. 2.42, 2.46).

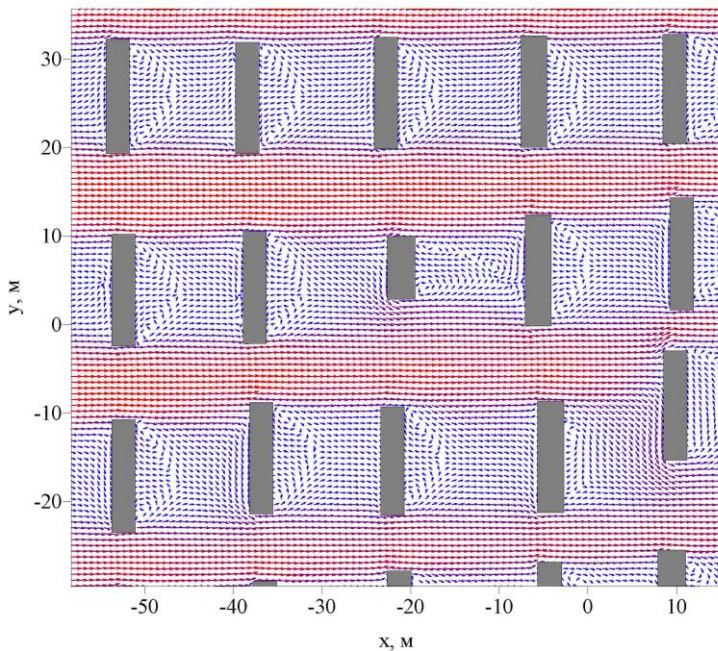


Рисунок 2.41 (начало)

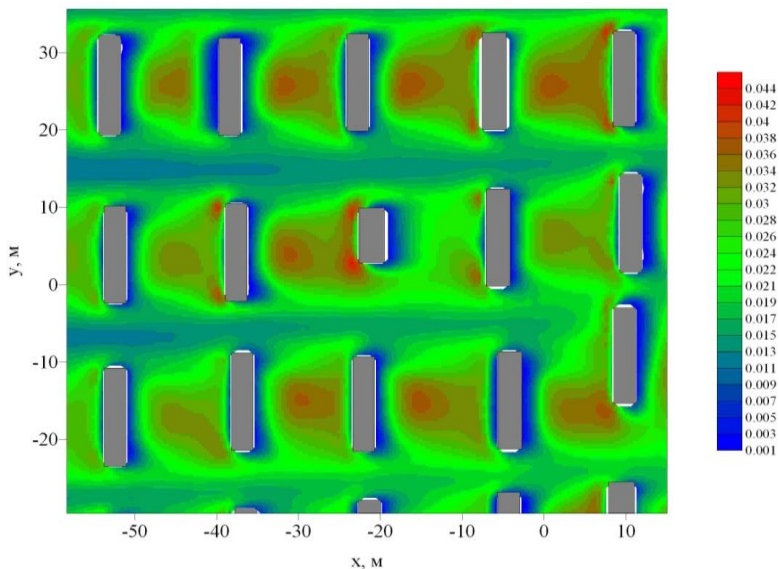


Рисунок 2.41 (окончание) – Векторное поле скорости и контурные линии кинетической энергии турбулентности в плоскости $z = 1,25$ м в центральной части расчётной области

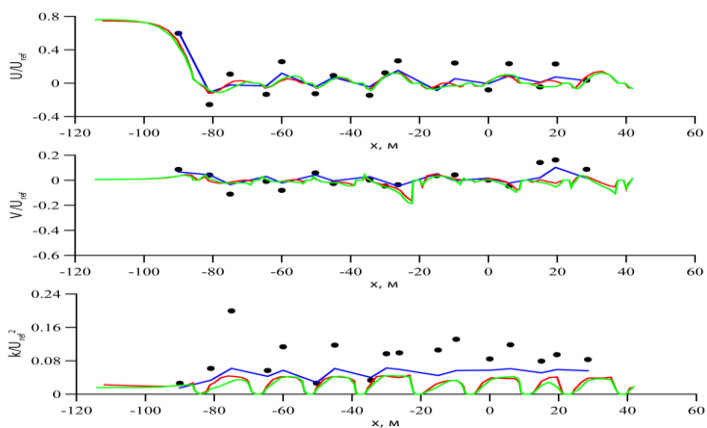


Рисунок 2.42 – Горизонтальные профили компонент вектора скорости U , V и кинетической энергии турбулентности при направлении ветра 0° ; координаты сечения: $y = 6,0$ м, $z = 1,25$ м; — расчёт FLUENT; — расчёт LEVM; — расчёт NLEVM; ● – данные измерений

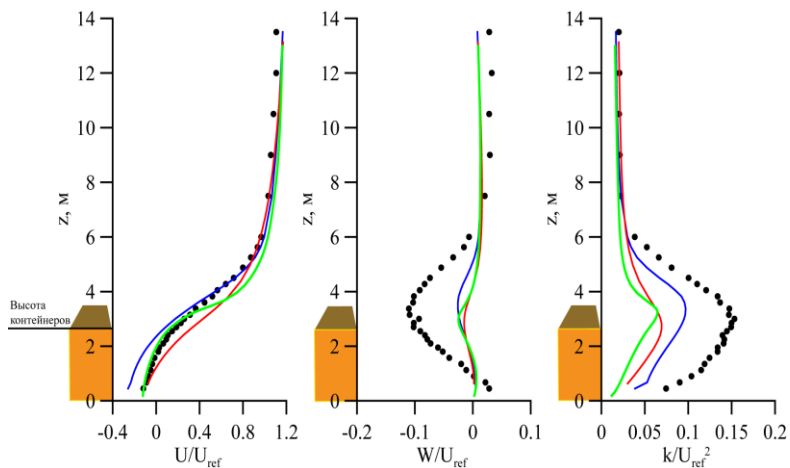


Рисунок 2.43 – Вертикальные профили компонент вектора скорости U , W и кинетической энергии турбулентности при направлении ветра 0° ; координаты сечения: $x = -76,0$ м, $y = 3,0$ м; — расчёт FLUENT; — расчёт LEVM; — расчёт NLEVM; ● – данные измерений

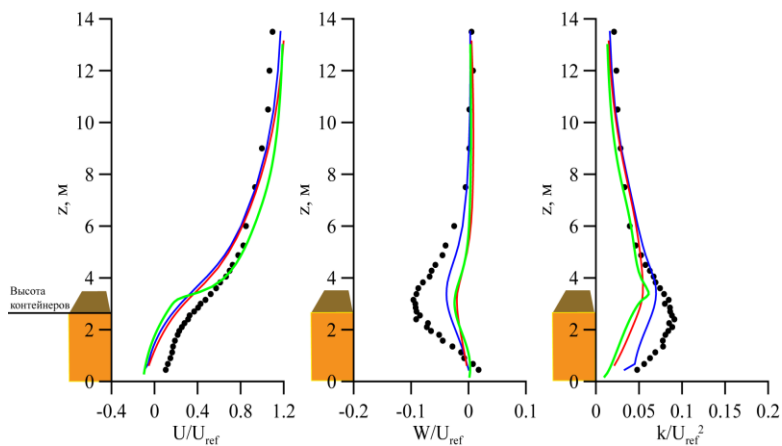


Рисунок 2.44 – Вертикальные профили компонент вектора скорости U , W и кинетической энергии турбулентности при направлении ветра 0° ; координаты сечения: $x = 13,5$ м, $y = 6,0$ м; — расчёт FLUENT; — расчёт LEVM; — расчёт NLEVM; ● – данные измерений

Результаты расчётов и экспериментов говорят о том, что профиль осевой составляющей скорости не всегда имеет логарифмическую форму, которую чаще всего используют в мезомасштабных метеорологических моделях для описания атмосферного городского пограничного слоя. Кроме того, заметна тенденция, которая выражается в том, что форма профиля компоненты вектора скорости U коренным образом зависит от уровня кинетической энергии турбулентности, т.е. чем выше величина k , тем больше профиль U соответствует логарифмическому виду.

Если сравнивать движение воздушных масс для 0 и -45° , то становится очевидным, что основные вихревые структуры смещаются на торцы контейнеров вниз по потоку и проявляются не везде, а кроме того, течение имеет нерегулярную структуру (см. рис. 2.45). Во всех случаях наблюдается занижение вертикальной составляющей вектора скорости и энергии турбулентности (см. рис. 2.43, 2.44, 2.47, 2.48).

Сопоставление расчётных и экспериментальных данных для двух случаев показывает, что общий уровень кинетической энергии турбулентности выше для 0° , чем для -45° . Объяснением этому служит характерное расположение контейнеров по отношению к набегающему потоку. Для первого варианта расчёта препятствия располагаются таким образом, что оказывают наибольшее сопротивление потоку и вследствие этого вызывают максимальную турбулизацию потока. Тогда как во втором случае расположение моделей зданий таково, что они оказывают существенно меньшее сопротивление набегающему течению. По этой же причине не существует сильных градиентов кинетической энергии турбулентности, однако в силу орографической неоднородности присутствуют интенсивные вертикальные потоки (см. рис. 2.47, 2.48).

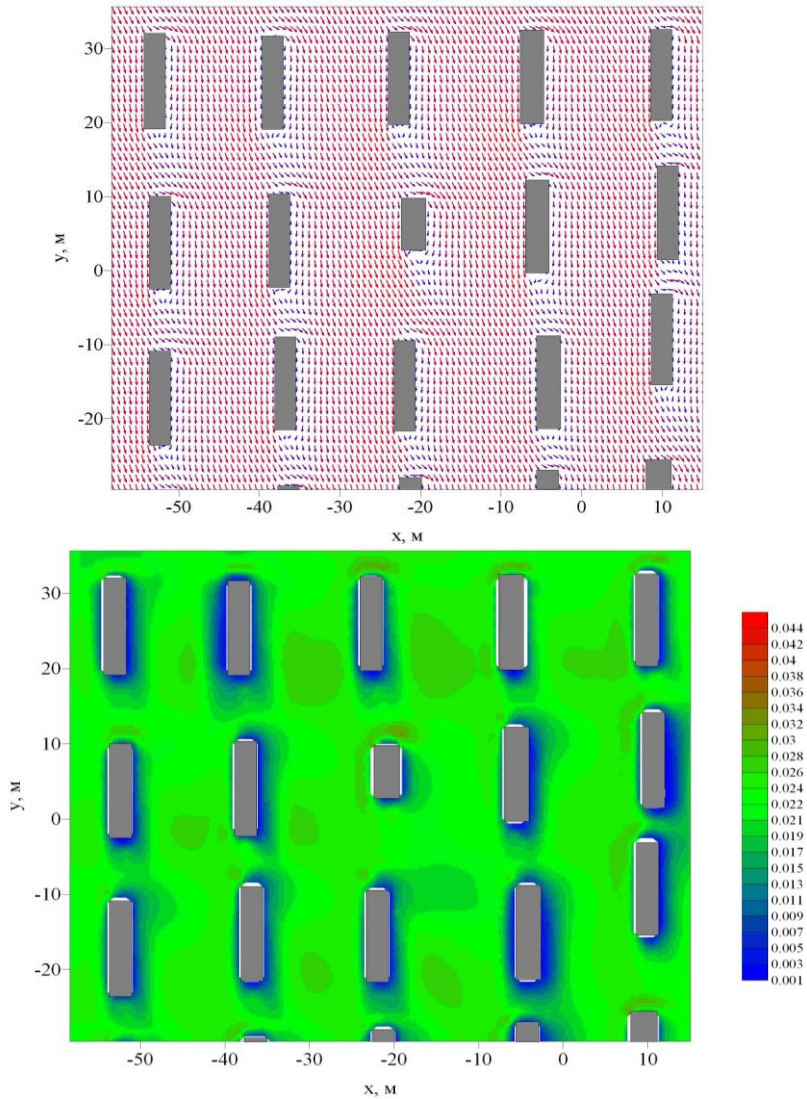


Рисунок 2.45 – Векторное поле скорости и контурные линии кинетической энергии турбулентности в плоскости $z = 1,25$ м в центральной части расчётной области при направлении ветра -45°

В целом можно сказать, что применение NLEVM-модели приводит к незначительному улучшению результатов расчёта. Видно улучшение результатов моделирования компонент скорости U и W , а также следует отметить, что профили осреднённых и турбулентных величин выглядят более «острыми».

Сопоставление предложенной модели с пакетом вычислительной гидродинамики ANSYS Fluent показывает, что в большинстве случаев ANSYS Fluent лучше воспроизводит структуру течения. Это происходит отчасти из-за того, что в ANSYS Fluent используется блочно-структурированная сетка, а в описанной в п. 2.2 модели применяются прямоугольная расчётная сетка и метод фиктивных областей. А так как контейнеры в MUST-эксперименте располагаются не в полной мере упорядоченно, то ANSYS Fluent корректнее описывает геометрию расчётной области. Тем не менее в некоторых областях ANSYS Fluent показывает строгое занижение параметров потока, например кинетической энергии турбулентности или вертикальной компоненты скорости.

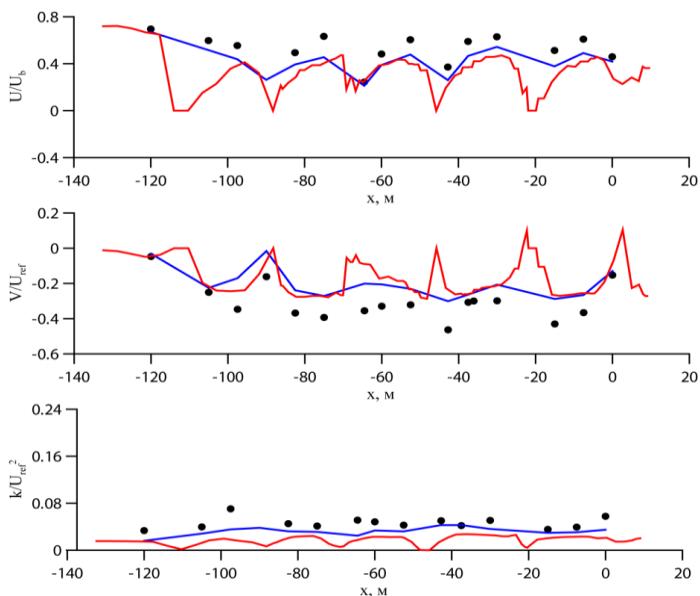


Рисунок 2.46 – Горизонтальные профили компонент вектора скорости U , V и кинетической энергии турбулентности при направлении ветра -45° ; координаты сечения: $y = -7,5$ м, $z = 1,25$ м; — расчёт FLUENT; — расчёт LEVM; • – данные измерений

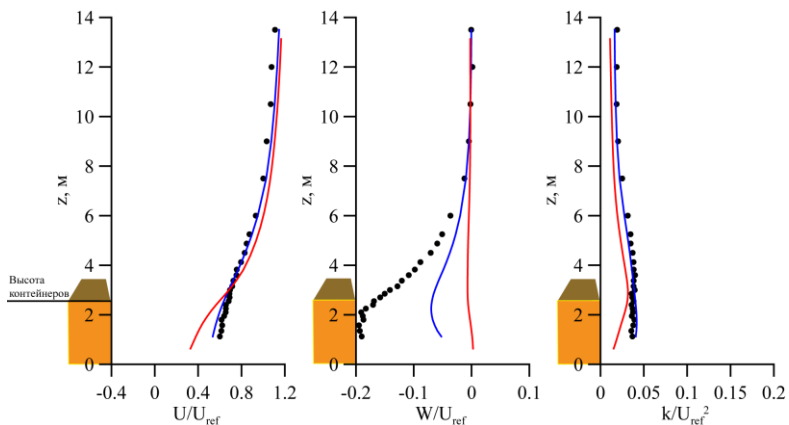


Рисунок 2.47 – Вертикальные профили компонент вектора скорости U , W и кинетической энергии турбулентности при направлении ветра -45° ; координаты сечения:

$x = -73,95$ м, $y = 8,625$ м; — — расчёт FLUENT; — — расчёт LEVM;

• — данные измерений

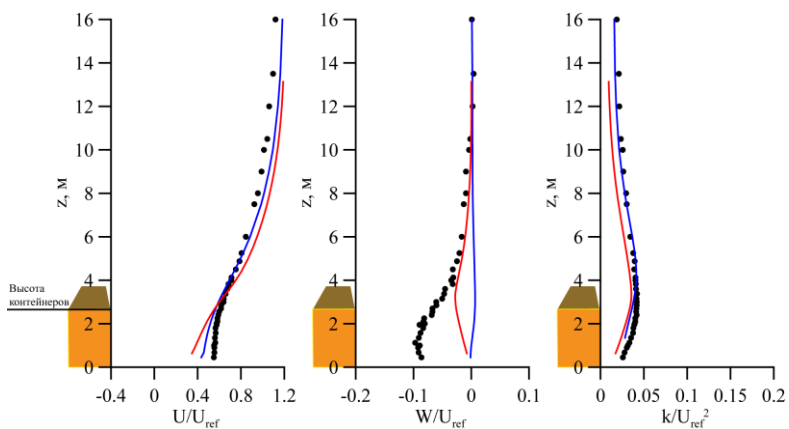


Рисунок 2.48 – Вертикальные профили компонент вектора скорости U , W и кинетической энергии турбулентности при направлении ветра -45° ; координаты сечения:

$x = -13,65$ м, $y = 5,1$ м; — — расчёт FLUENT; — — расчёт LEVM; • — данные измерений

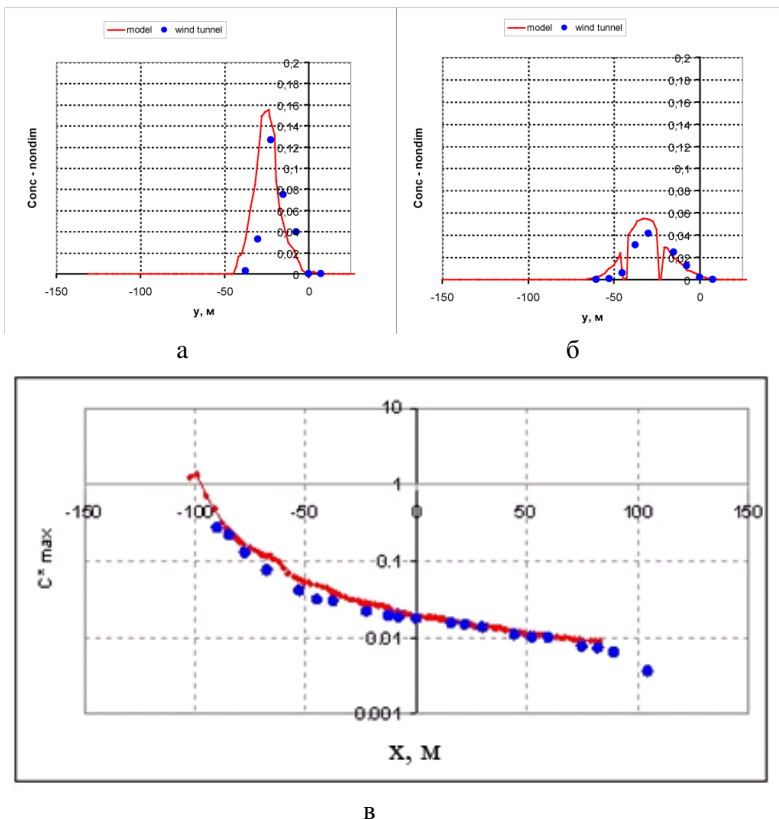


Рисунок 2.49 – Профили концентрации на расстоянии 27 м от источника (а); профили концентрации на расстоянии 50 м от источника (б); распределение максимальных значений концентрации примеси вдоль оси Ox (в); — расчёт; • – данные измерений

Анализируя результаты расчётов распространения примеси в массиве контейнеров, можно отметить, что существует интенсивное перемешивание и рассеяние примеси. На участке от -100 до 0 м максимальные значения примеси интенсивно уменьшаются по параболической зависимости, а далее, вниз по потоку от 0 до 100 м по оси Ox , происходит изменение характера зависимости на линейный. Таким образом, вдоль основного направления вниз по потоку, в цен-

тральной части, сохраняется глобальный максимум концентрации, который незначительно отклоняется от основного направления течения из-за сложной орографической структуры расчётной геометрии (рис. 2.49).

Чаще всего для анализа и сравнения расчётных данных с экспериментом или полевыми измерениями применяют графический метод, т.е. изображают профили актуальных величин, таких как компоненты вектора скорости или турбулентная кинетическая энергия, и сравнивают их с аналогичными измеренными. Если расчетные данные в целом согласуются с экспериментальными данными, то говорят, что математическая модель удовлетворительно описывает то или иное явление. Однако такая проверка даёт лишь качественный анализ и определяет согласованность численной модели с экспериментом в зависимости от ряда параметров, таких как пространственные координаты, время и т.д. Кроме того, простое графическое сравнение плохо подходит для больших задач и количественной проверки, поэтому в данном случае необходимы статистические методы [159,160]. В качестве таких методов может выступать система показателей, которая чаще всего используется для оценки эффективности разномасштабных метеорологических моделей [36,37] и является общепринятой в мире:

среднеквадратичная ошибка

$$NMSE = \frac{\sum_{i=1}^n (O_i - P_i)^2}{\sum_{i=1}^n (O_i P_i)};$$

относительная ошибка

$$FB = \frac{(\bar{O} - \bar{P})}{0,5(\bar{O} + \bar{P})}, \bar{O} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n O_i, \bar{P} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_i;$$

коэффициент корреляции

$$R = \frac{\sum_{i=1}^n [(O_i - \bar{O})(P_i - \bar{P})]}{[\sum_{i=1}^n (O_i - \bar{O})^2]^{1/2} [\sum_{i=1}^n (P_i - \bar{P})^2]^{1/2}};$$

доля данных FAC2, которые удовлетворяют соотношению

$$0,5 \leq \frac{P_i}{O_i} \leq 2,0,$$

где P_i означает рассчитанную по модели величину; O_i – измеренную величину, а черта сверху (\bar{P}) символизирует осреднение по набору данных.

Кроме того, используется коэффициент успешности

$$q = \frac{N}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i,$$

$$N_i = \begin{cases} 1, \text{ для } \left| \frac{P_i - O_i}{O_i} \right| \leq D \text{ или } |P_i - O_i| \leq W, \\ 0, \text{ иначе,} \end{cases}$$

где N – количество точек, в которых проводилось сравнение данных; D – допустимая относительная погрешность ($=0,25$) и W – допустимая абсолютная погрешность.

Идеальная модель должна иметь q и $FAC2 = 1,0$, а FB и $NMSE = 0,0$.

Чтобы вычислительная модель была удовлетворительного качества, величины описанных выше статистических параметров должны принимать следующие значения:

$$FAC2 \geq 0,5;$$

среднее отклонение в пределах $\pm 30\%$ от среднего (т.е. приблизительно $|FB| < 0,3$);

беспорядочный разброс с множителем порядка от двух до трёх от среднего (т.е. приблизительно $NMSE < 4$);

$$q \geq 0,66;$$

$$R > 0,5.$$

Таблица 2.2 – Система показателей для вертикальных профилей скорости и кинетической энергии турбулентности, направление ветра 0° , модель турбулентности LEVM

	Количество точек	W	D	R	q	$FAC2$	FB	$NMSE$
U	566	0,008	0,25	0,832	0,70318	0,897527	–	–
W	566	0,007	0,25	0,5917	0,166078	0,167845	–	–
K	566	0,005	0,25	0,3924	0,432862	0,787986	0,381555	0,349436

Таблица 2.3 – Система показателей для вертикальных профилей скорости и кинетической энергии турбулентности, направление ветра 0°, модель турбулентности NLEVM

	Количество точек	W	D	R	q	$FAC2$	FB	$NMSE$
U	566	0,008	0,25	0,8385	0,689046	0,844523	–	–
W	566	0,007	0,25	0,4632	0,155477	0,164311	–	–
K	566	0,005	0,25	0,2505	0,432862	0,768551	0,398396	0,422843

Таблица 2.4 – Система показателей для вертикальных профилей скорости и кинетической энергии турбулентности, направление ветра –45°, модель турбулентности LEVM

	Количество точек	W	D	R	q	$FAC2$	FB	$NMSE$
U	496	0,008	0,25	0,8791	0,818548	0,951613	–	–
W	496	0,007	0,25	0,289	0,205645	0,358871	–	–
K	496	0,005	0,25	0,1796	0,506048	0,866935	0,326466	0,230018

Таблица 2.5 – Система показателей для горизонтальных профилей скорости и кинетической энергии турбулентности, направление ветра –45°, модель турбулентности LEVM

	Количество точек	W	D	R	q	$FAC2$	FB	$NMSE$
U	787	0,008	0,25	0,735	0,72554	0,94155	–	–
W	787	0,007	0,25	0,6554	0,23507	0,587039	–	–
K	787	0,005	0,25	0,0288	0,090216	0,656925	0,649704	0,705829

Таблица 2.6 – Система показателей для горизонтальных профилей концентрации, направление ветра –45°, модель турбулентности LEVM

	Количество точек	W	D	R	q	$FAC2$	FB	$NMSE$
C^*	248	0,003	0,25	0,201	0,794355	0,862903	– 0,40582	9,832541

Параметр FB используется как для положительных, так и для отрицательных величин, но может при этом давать неадекватные результаты. Так, если средняя величина для наблюдений является 1,01,

а средняя расчётная величина составляет $-1,0$, тогда FB будет равно 402. Для этого же примера характеристика $NMSE$ будет отрицательной, хотя по определению является положительной. Поэтому для анализа будут учитываться лишь те данные, расчётные и экспериментальные значения которых могут быть только положительными, т.е. кинетическая энергия турбулентности и концентрация примеси.

Из расчётов видно, что для направления движения воздушных масс 0 и -45° как для совокупности вертикальных, так и для горизонтальных профилей продольная составляющая вектора скорости U/U_{ref} имеет величину $q > 0,66$. Анализ сравнения набора расчётных и экспериментальных данных величины W/U_{ref} на основе критерия q говорит о значительном несоответствии расчёта и эксперимента в некоторых областях. Значения R говорят о том, что модель способна удовлетворительно воспроизводить осреднённое поле скорости, а из рис. 2.43, 2.44, 2.47, 2.48 становится ясно, что недооценка W происходит в основном внутри массива контейнеров.

Из приведённой системы показателей (табл. 2.2–2.6) также следует, что существует строгое занижение k/U_{ref}^2 во всех рассмотренных случаях (положительные значения параметра FB), однако параметр $FAC2$ показывает, что доля таких данных всегда меньше 35 % от общего количества. Кроме того, анализ результатов сопоставления расчёта и данных эксперимента для концентрации примеси с помощью предложенной системы показателей говорит об удовлетворительном их согласии: $q = 0,79$, $FAC2 = 0,86$, но очевидно завышение расчётных значений: $FB = -0,4$.

2.12 Численное исследование аэродинамической картины и распространения выбросов автотранспорта для участка городской застройки Томска

Исследование аэродинамики в уличных каньонах для условий г. Томска проводилось на основе картографических данных из общедоступной геоинформационной системы ДубльГИС (<http://www.2gis.tomsk.ru/>), в которой представлена информация по размещению городских зданий (координаты зданий и их высоты) и расположению автомагистралей.

В качестве области исследования рассматривается параллелепипед размером 260×260 м и высотой 60 м. На рис. 2.50 приведена схема расчётного участка вдоль центральной улицы – пр. Ленина. Для проведения расчётов было выбрано юго-западное направление ветра, которое обозначено красной стрелкой на рисунке. Выбор такого направления обусловлен тем, что преобладающие ветра над Томском и Томским районом – юго-западные в летний период и северо-восточные в зимний [161]. Исследуемая область включает здания различной конфигурации и этажности. Для расчётов используется неравномерная сетка, которая состоит из $177 \times 182 \times 79$ ячеек по осям Ox , Oy и Oz соответственно. Источники примеси соответствуют положению автодорог.

На входе в расчётную область скорость потока и турбулентные параметры имеют профили [161]:

$$U(z) = U_{ref} \left(\frac{z}{z_{ref}} \right)^\alpha,$$

$$k(z) = \frac{u_*^2}{\sqrt{C_\mu}},$$

$$\varepsilon(z) = \frac{u_*^3}{\kappa(z + z_0)},$$

где $\alpha = 0,16$, $u_* = 0,38$ м/с, $z_0 = 0,05$ м, $U_{ref} = 5,5$ м/с, $z_{ref} = 9,0$ м.

На рис. 2.51 и 2.52 представлены векторное поле скорости и цветные карты распределения энергии турбулентности и концентрации примеси в рассматриваемой области. Из расчетов видно, что вблизи поверхности существуют многочисленные рециркуляционные участки в углах зданий и на их торцах (см. рис. 2.51). Генерация кинетической энергии турбулентности происходит в областях вращательного движения воздушных масс (см. рис. 2.51), а также на торцах там, где поток воздуха встречается с тремя девятиэтажными зданиями (слева) и зданием такой же этажности (крайнее правое). Вычисления показывают, что уровень турбулентности всегда выше внутри городской застройки.



Рисунок 2.50 – Схема участка городской застройки Томска: красным прямоугольником выделена расчётная область, а стрелкой показано направление ветра

Вычисления показывают, что максимумы концентрации выхлопов автотранспорта располагаются вдоль дорог, однако в приземной области наблюдается увеличение локальных максимумов в районе вторичных вращательных движений воздушных масс вниз по потоку рядом с девятиэтажными зданиями. Это объясняется тем, что вращательное движение воздуха вовлекает примесь с наветренной стороны и удерживает её у подветренной стороны зданий. Кроме того, необходимо отметить, что картины распределения выхлопов вблизи поверхности ($z = 1,5$) и выше имеют отличия (см. рис. 2.52). Так, например, на высоте $z = 9,9$ м существуют локальные максимумы над крышей торгового центра и внутри городской застройки, а также в углу девятиэтажного здания (справа внизу) и вокруг здания, которое находится в нижней центральной части расчётной области.

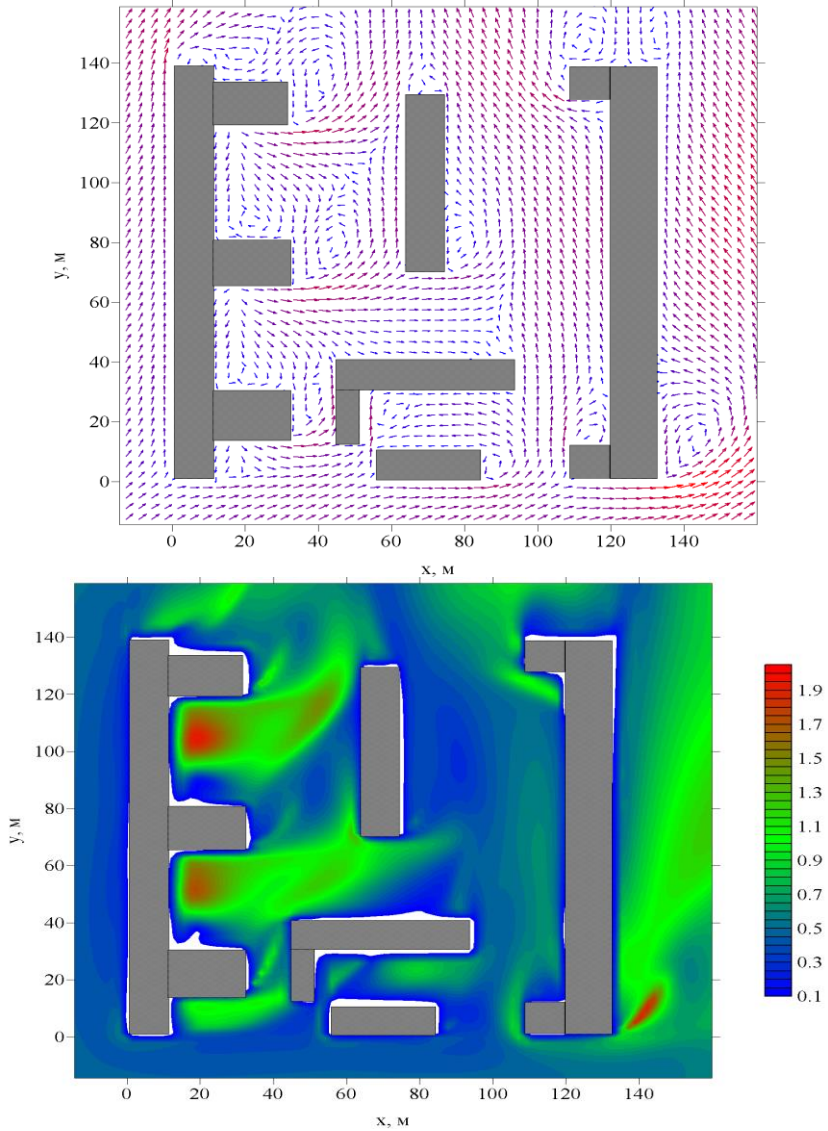


Рисунок 2.51 – Векторное поле скорости (сверху) и контурные линии кинетической энергии турбулентности (снизу) для участка Томска, $z = 1,5$ м

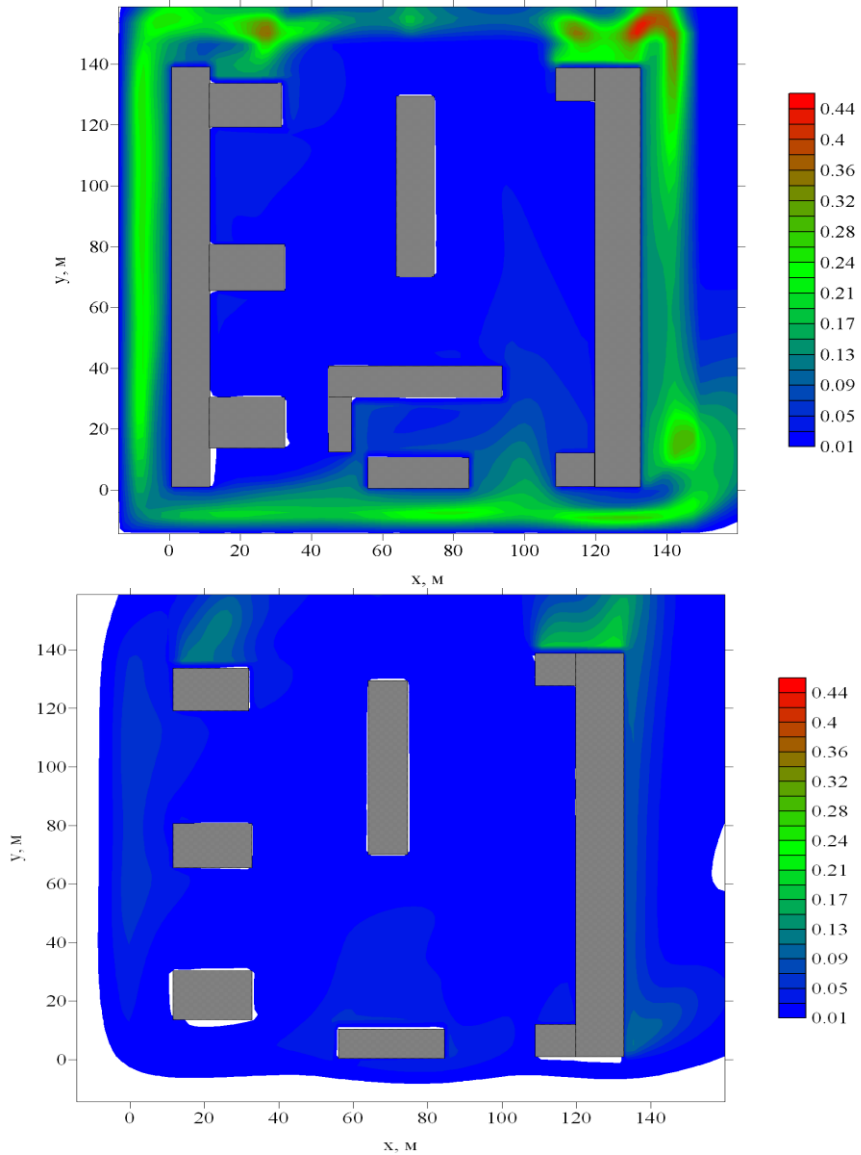


Рисунок 2.52 – Контурные линии концентрации для участка Томска, $z = 1,5$ м (сверху) и $z = 9,9$ м (снизу)

Картина распределения выхлопов на различных высотах говорит о том, что существует не только интенсивное вращательное движение в плоскости Oxy , но и вертикальное перемешивание. К таким выводам можно прийти, если посмотреть на локальные максимумы при $z = 9,9$ м. Существуют также подковообразные рециркуляции подобно случаю обтекания куба.

Сопоставление максимумов кинетической энергии турбулентности и уровней концентрации примеси говорит о том, что в областях с наибольшими значениями кинетической энергии внутри городской застройки доминируют процессы турбулентной диффузии. Поэтому примесь в приземной области успевает рассеяться, а вследствие этого отсутствуют локальные максимумы концентрации примеси.

3 Вихреразрешающее моделирование движения воздуха и переноса примеси в уличных каньонах

3.1 Физическая и математическая постановка задачи

3.1.1 Физическая постановка задачи

Рассматривается трехмерное нестационарное турбулентное движение несжимаемой среды над поверхностью с элементами крупномасштабной шероховатости. Элементы шероховатости представляют собой прямоугольные объёмные препятствия, размеры которых соизмеримы с областью исследования. Рассматриваются точечные, линейные и площадные источники примеси постоянной интенсивности.

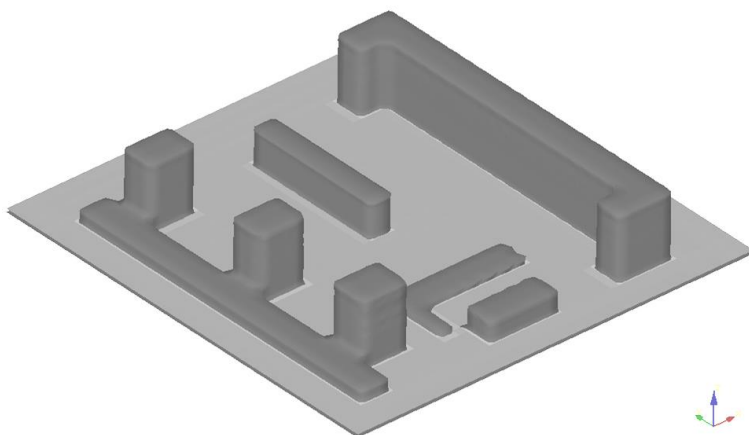


Рисунок 3.1 – Пример геометрии области исследования

Выбор геометрии области ориентирован как на исследование возможностей вихреразрешающего моделирования адекватно предсказывать характеристики турбулентного потока за препятствиями,

так и на проведение исследований распространения примеси от автотранспорта или других загрязнителей окружающей среды в пределах реальной городской застройки.

3.1.2 Математическая постановка задачи

Математическая модель трехмерного нестационарного турбулентного движения несжимаемой среды включает в себя отфильтрованные уравнения неразрывности и Навье–Стокса, записанные относительно размерных величин [48]:

$$; \quad \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.2)$$

Здесь \bar{u}_i – отфильтрованные проекции мгновенного вектора скорости на оси координат Ox_i ; \bar{p} – мгновенное значение давления; ν – кинематическая вязкость; ρ – плотность; τ_{ij} – тензор подсеточных напряжений. По повторяющимся индексам j проводится суммирование.

Отфильтрованное транспортное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{C}}{\partial x_i} = \alpha \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + Q. \quad (3.3)$$

Здесь \bar{C} – концентрация или температура; Q – функция, описывающая распределение источников массы или тепла; α – коэффициент диффузии; q_i – подсеточный поток массы или тепла.

Из-за наличия в системе уравнений слагаемых τ_{ij} и q_i она получилась незамкнутой, для ее замыкания в данной работе используется одна из двух подсеточных моделей.

3.1.3 Подсеточная модель Смагоринского и замыкание динамического типа

Наиболее простой и предпочтительной в практическом плане является модель Смагоринского [66]:

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} \approx \tau_{ij}^{smag} = -\nu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (3.4)$$

где ν_T – турбулентная вязкость. В отличие от кинематической вязкости ν_T является свойством движения жидкости, а не внутренним свойством вещества, поэтому она должна выражаться через зависящие переменные задачи. Турбулентная вязкость ν_T определяется средним значением скорости диссипации энергии турбулентности, приходящейся на единицу объема, и масштабом подсеточных вихрей [50]. Поэтому формулу турбулентной вязкости можно записать в следующем виде:

$$\nu_T = C_s^2 \Delta_g^2 |\bar{S}|. \quad (3.5)$$

Здесь C_s – постоянная Смагоринского; $\Delta_g = h$ – шаг сетки модели; $|\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}$ – норма тензора скорости деформации;

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right).$$

Динамические модели (см. п. 1.2.3.2) чувствительны к локальному состоянию потока и за счет этого более точно предсказывают поведение потока, перемешивание или турбулентный переход, а также ведут себя корректно в пристеночной области в противоположность модели Смагоринского с постоянным коэффициентом. Описание динамической процедуры будет приведено ниже, в п. 3.2, где также будут представлены формулы для расчета коэффициента Смагоринского в каждой точке расчетной области.

Для определения подсчетного потока массы (или тепла) q_i используются градиентные соотношения вида $q_i = -\frac{\nu_T}{\sigma_c} \frac{\partial C}{\partial x_i}$, где σ_c – параметр, отражающий подобие подсчетных потоков массы (или тепла) и импульса.

3.1.4 Уравнение переноса тепла или концентрации примеси

Поле температуры определяется из решения уравнения переноса тепла, которое имеет вид

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{T}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\frac{\nu}{\text{Pr}} + \frac{\nu_T}{\text{Pr}_\tau} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \right) + S. \quad (3.6)$$

Здесь \bar{T} – температура; Pr – число Прандтля; Pr_τ – турбулентное число Прандтля; S – функция, описывающая распределение источников тепла.

Поле концентрации загрязняющих веществ определяется из решения уравнения переноса примеси, которое имеет вид

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{C}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\frac{\nu}{\text{Sc}} + \frac{\nu_T}{\text{Sc}_\tau} \right) \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_i} \right) + S. \quad (3.7)$$

Здесь \bar{C} – концентрация; Sc – число Шмидта; Sc_τ – турбулентное число Шмидта; S – функция описывающая распределение источников примеси.

3.1.5 Граничные условия

В связи с тем, что пространственное разрешение для случая городской застройки не позволяет описывать процессы в вязком пристенном подслое, то суммарное воздействие мелкомасштабных не-

однородностей стенки должно быть учтено при помощи пристеночной модели.

Известно, что в зоне развитой турбулентности изменение продольной компоненты скорости в зависимости от расстояния от поверхности можно с хорошей точностью аппроксимировать логарифмической зависимостью. Поэтому в книге для правильного описания поведения средних величин использовалась логарифмическая пристеночная модель, не выходящая за пределы первого расчетного слоя, которая успешно применялась в других работах и описана в [47]. Пренебрегая отклонением профиля скорости от логарифмического закона, скорость в первом расчетном узле над шероховатой поверхностью можно определить, используя следующую зависимость:

$$u_1 = \frac{u_\tau}{k} \ln \left(\frac{z_1}{z_0} \right). \quad (3.8)$$

Здесь z_0 – параметр шероховатости; $k \approx 0,4$ – постоянная Кармана.

Предположение о логарифмическом распределении профиля скорости использовалось в первом от стенки расчетном узле ($z = 0,5h_z$) области для оценки влияния трения у стенки на профиль скорости. Динамическая скорость на границе вычисляется по формулам:

$$u_\tau(x, y)|_{z=0} = k |\bar{u}| / \ln \left(\frac{0,5h_z}{z_0} \right), \quad (3.9)$$

$$\tau_{i3}(x, y, 0) = -u_\tau^2 \cdot \bar{u}_i(x, y, h_z/2) / |\bar{u}|, \quad (3.10)$$

где $i = 1, 2$; $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

В качестве граничных условий также задается температура стенки и в пристенной ячейке ($0 < z \leq h_z$), кроме того, предполагается изменение температуры по логарифмическому закону. Для концентрации примеси на стенках задается равенство нулю производных по нормали. На удаленных границах расчётной области задаются простые градиентные условия.

В случае решения модельных задач, если позволяет пространственное разрешение, производится сквозной расчёт от стенки с явным разрешением вязкого подслоя.

3.2 Численный метод решения дифференциальной задачи для LES-подхода

3.2.1 Построение вычислительной сетки

Аппроксимация дифференциальной задачи осуществляется на основе метода конечного объема. Основная идея этого метода заключается в разбиении расчетной области на непересекающиеся, граничащие друг с другом конечные объемы так, чтобы один узел расчетной сетки содержался только в своем конечном объеме. Разбив таким образом расчетную область, интегрируем каждое уравнение математической модели по каждому конечному объему. Значения компонент скорости определяются на гранях конечных объемов, а скалярные характеристики – в их центре. При вычислении интегралов используются кусочно-полиномиальные приближения для зависимых величин. Аппроксимация конвективных членов уравнений переноса выполняется с использованием одной из четырех схем: противопотоковой схемы MLU Ван Лира [125], схемы Леонарда QUICK [126], центрально-разностной схемы второго или четвертого порядка. В результате такого приближенного интегрирования получается дискретный аналог системы дифференциальных уравнений – система линейных алгебраических уравнений.

При расчёте течений в областях сложной геометрии использовался метод фиктивных областей, суть которого в том, что значения векторных и скалярных величин в области преграды равны нулю и на границах фиктивных конечных объемов отсутствуют диффузионные потоки. Трение и теплообмен в пристеночных ячейках учитываются путем введения источниковых членов в конечно-разностные уравнения.

Рассмотрим используемые обозначения на примере ячейки (i, j, k) , центром этой ячейки является точка с координатами (x_i, y_j, z_k) , конечный объем можно задать как декартово произведе-

дение отрезков $[x_c, x_{c+1}] \times [y_c, y_{c+1}] \times [z_c, z_{c+1}]$, где $x_c, x_{c+1}, y_c, y_{c+1}, z_c, z_{c+1}$ – координаты граней конечных объемов.

Сетка построена, доопределим некоторые размеры: dx_i, dy_j, dz_k – расстояния между центрами ячеек; bx_i, by_j, bz_k – расстояния между сеточными линиями рассматриваемого контрольного объема (рис. 3.2).

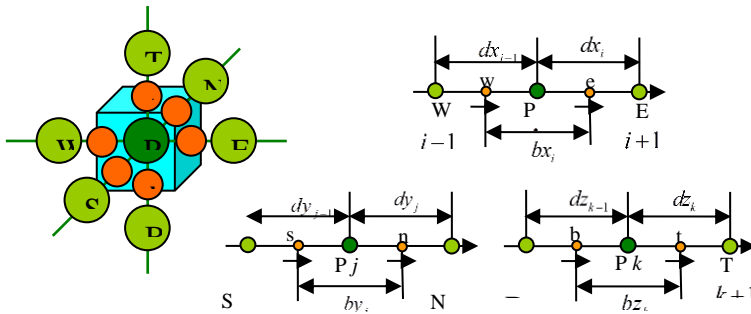


Рисунок 3.2 – Шаблон вычислительной сетки (a); обозначение размеров (б)

Для дискретизации используется равномерная декартова сетка, допускающая сгущение в областях, представляющих наибольший интерес для исследования или требующих высокого разрешения с точки зрения моделируемых процессов (рис. 3.3).

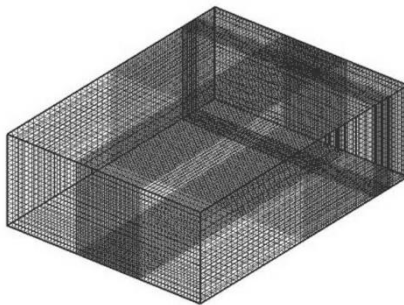


Рисунок 3.3 – Пример построения используемой для дискретизации сетки

3.2.2 Аппроксимация уравнения переноса

Разностная сетка построена, рассмотрим как осуществляется дискретизация трехмерного нестационарного уравнения конвекции-диффузии с источником S :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial(u\Phi)}{\partial x} + \frac{\partial(v\Phi)}{\partial y} + \frac{\partial(w\Phi)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] + S. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Здесь Φ – обобщенная скалярная величина, которая может представлять любую компоненту скорости, температуру или значение концентрации примеси; Γ – коэффициент диффузии величины Φ , а (u, v, w) – компоненты скорости, причем $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$.

Будем придерживаться системы обозначений, привязанной к номерам сеточных ячеек, например $\Phi(x_i, y_j, z_k) \approx \Phi_{i,j,k}$ для центра ячейки. Для случая когда неизвестная величина попала на грань конечного объема, будем добавлять к обозначению неизвестной строчную букву, обозначающую направление от центра конечного объема, например Φ_e – значение неизвестной на грани конечного объема между узлами (i, j, k) и $(i+1, j, k)$. Данные обозначения в отличие от используемых в [49] проще с точки зрения переноса на программную реализацию, в то же время они по-прежнему достаточно компактны для описания дискретизации трехмерного адвективно-диффузионного уравнения.

Значения скалярных величин определяются в центрах конечных объемов. В случае если в результате дискретизации значение попадает на грань конечного объема, необходимо использовать интерполяцию по соседним двум или четырем узлам. При дискретизации по времени используется явная разностная схема. Проинтегрируем по конечному объему каждый член дифференциального уравнения (3.11).

Нестационарный член:

$$\iiint_{\Delta ijk} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) dx dy dz \approx \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{i,j,k} \cdot bx_i \cdot by_j \cdot bz_k. \quad (3.12)$$

Конвективные слагаемые:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Delta ijk} \left(\frac{\partial (u\Phi)}{\partial x} \right) dx dy dz &\approx (u_e \Phi_e - u_w \Phi_w) \cdot by_j \cdot bz_k; \\ \iiint_{\Delta ijk} \left(\frac{\partial (v\Phi)}{\partial y} \right) dx dy dz &\approx (v_n \Phi_n - v_s \Phi_s) \cdot bx_i \cdot bz_k; \\ \iiint_{\Delta ijk} \left(\frac{\partial (w\Phi)}{\partial z} \right) dx dy dz &\approx (w_t \Phi_t - w_b \Phi_b) \cdot bx_i \cdot by_j. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Диффузионные слагаемые:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Delta ijk} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] \right) dx dy dz &\approx \left(\Gamma_e \cdot \frac{\Phi_{i+1,j,k} - \Phi_{i,j,k}}{dx_i} - \Gamma_w \cdot \frac{\Phi_{i,j,k} - \Phi_{i-1,j,k}}{dx_{i-1}} \right) \cdot by_j \cdot bz_k; \\ \iiint_{\Delta ijk} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left[\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] \right) dx dy dz &\approx \left(\Gamma_n \cdot \frac{\Phi_{i,j+1,k} - \Phi_{i,j,k}}{dy_j} - \Gamma_s \cdot \frac{\Phi_{i,j,k} - \Phi_{i,j-1,k}}{dy_{j-1}} \right) \cdot bx_i \cdot bz_k; \\ \iiint_{\Delta ijk} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left[\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] \right) dx dy dz &\approx \left(\Gamma_t \cdot \frac{\Phi_{i,j,k+1} - \Phi_{i,j,k}}{dz_k} - \Gamma_b \cdot \frac{\Phi_{i,j,k} - \Phi_{i,j,k-1}}{dz_{k-1}} \right) \cdot bx_i \cdot by_j. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Выше было описано использование подсеточных моделей для снятия жестких ограничений, накладываемых внутренними свойствами турбулентности на разрешение используемой разностной сетки. Посредством подсеточных моделей описываются неразрешенные явно масштабы турбулентности. С точки зрения разрешения наименьшего временного масштаба необходимо использовать достаточно подробные шаги по времени, что делает использование явных разностных схем более рациональным, поскольку они, кроме того, хорошо распараллеливаются в сравнении с неявными схемами и позволяют получать более эффективные реализации для многопроцессорных вычислительных систем.

Для дискретизации по времени желательнее использование схемы второго или более высокого порядка аппроксимации. Для этих целей подходят методы Рунге–Кутты произвольного порядка точности или метод Адамса–Бэшфорда второго порядка аппроксимации [142]:

$$\Phi_{i,j,k}^{n+1} = \Phi_{i,j,k}^n + \Delta t_n \left(\frac{3}{2} f(\Phi^n) - \frac{1}{2} f(\Phi^{n-1}) \right). \quad (3.15)$$

Использование этой схемы является достаточным с точки зрения точности и позволяет избежать дополнительных вычислений, которые могут потребоваться при использовании методов Рунге–Кутты повышения порядка точности [162].

В формуле (3.15) под $f(\Phi)$ следует понимать:

$$f(\Phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] - \frac{\partial(u\Phi)}{\partial x} - \frac{\partial(v\Phi)}{\partial y} - \frac{\partial(w\Phi)}{\partial z} + S. \quad (3.16)$$

При этом, используя формулы (3.13)–(3.14), можно записать $f(\Phi^n)$ и $f(\Phi^{n-1})$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} & f(\Phi^n) \cdot bx_i \cdot by_j \cdot bz_k = \\ & = \left(\Gamma_e^n \frac{\Phi_{i+1,j,k}^n - \Phi_{i,j,k}^n}{dx_i} - \Gamma_w^n \frac{\Phi_{i,j,k}^n - \Phi_{i-1,j,k}^n}{dx_{i-1}} \right) by_j bz_k - \\ & - \left(u_e^n \Phi_e^n - u_w^n \Phi_w^n \right) by_j bz_k + \\ & + \left(\Gamma_n^n \frac{\Phi_{i,j+1,k}^n - \Phi_{i,j,k}^n}{dy_j} - \Gamma_s^n \frac{\Phi_{i,j,k}^n - \Phi_{i,j-1,k}^n}{dy_{j-1}} \right) bx_i bz_k - \\ & - \left(v_n^n \Phi_n^n - v_s^n \Phi_s^n \right) bx_i bz_k + \\ & + \left(\Gamma_t^n \frac{\Phi_{i,j,k+1}^n - \Phi_{i,j,k}^n}{dz_k} - \Gamma_b^n \frac{\Phi_{i,j,k}^n - \Phi_{i,j,k-1}^n}{dz_{k-1}} \right) bx_i by_j - \\ & - \left(w_t^n \Phi_t^n - w_b^n \Phi_b^n \right) bx_i by_j + \\ & + S_{i,j,k}^n bx_i by_j bz_k; \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}
& f\left(\Phi^{n-1}\right) \cdot b x_i \cdot b y_j \cdot b z_k = \\
& = \left(\Gamma_e^{n-1} \frac{\Phi_{i+1,j,k}^{n-1} - \Phi_{i,j,k}^{n-1}}{d x_i} - \Gamma_w^{n-1} \frac{\Phi_{i,j,k}^{n-1} - \Phi_{i-1,j,k}^{n-1}}{d x_{i-1}} \right) b y_j b z_k - \\
& - \left(u_e^{n-1} \Phi_e^{n-1} - u_w^{n-1} \Phi_w^{n-1} \right) b y_j b z_k + \\
& + \left(\Gamma_n^{n-1} \frac{\Phi_{i,j+1,k}^{n-1} - \Phi_{i,j,k}^{n-1}}{d y_j} - \Gamma_s^{n-1} \frac{\Phi_{i,j,k}^{n-1} - \Phi_{i,j-1,k}^{n-1}}{d y_{j-1}} \right) b x_i b z_k - \\
& - \left(v_n^{n-1} \Phi_n^{n-1} - v_s^{n-1} \Phi_s^{n-1} \right) b x_i b z_k + \\
& + \left(\Gamma_t^{n-1} \frac{\Phi_{i,j,k+1}^{n-1} - \Phi_{i,j,k}^{n-1}}{d z_k} - \Gamma_b^{n-1} \frac{\Phi_{i,j,k}^{n-1} - \Phi_{i,j,k-1}^{n-1}}{d z_{k-1}} \right) b x_i b y_j - \\
& - \left(w_t^{n-1} \Phi_t^{n-1} - w_b^{n-1} \Phi_b^{n-1} \right) b x_i b y_j + \\
& + S_{i,j,k}^{n-1} b x_i b y_j b z_k.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

В результате аппроксимации конвективных членов уравнения переноса появляются следующие слагаемые: Φ_e^n , Φ_w^n , Φ_n^n , Φ_s^n , Φ_t^n , Φ_b^n , Φ_e^{n-1} , Φ_w^{n-1} , Φ_n^{n-1} , Φ_s^{n-1} , Φ_t^{n-1} , Φ_b^{n-1} . Это значения неизвестной функции на гранях конечных объёмов. Далее необходимо заменить значение неизвестной функции на границах конечных объёмов значениями функции в центре конечного объёма. Для этого используется одна из описанных ниже схем аппроксимации конвективных слагаемых.

Центрально-разностная схема

Известно, что эта схема не является монотонной, однако в силу её консервативности она часто применяется при моделировании турбулентности методом крупных вихрей. В данной работе для аппроксимации конвективных слагаемых использовалась центрально-разностная схема второго

$$\Phi_e^n = 0,5 \cdot \left(\Phi_{i+1,j,k}^n + \Phi_{i,j,k}^n \right) \tag{3.19}$$

или четвертого

$$\begin{aligned} \Phi_e^n = & 0,25 \cdot \Phi_{i+2,j,k}^n + 0,25 \cdot \Phi_{i+1,j,k}^n + \\ & + 0,25 \cdot \Phi_{i,j,k}^n + 0,25 \cdot \Phi_{i-1,j,k}^n \end{aligned} \quad (3.20)$$

порядка точности (запись для равномерной сетки).

Схема QUICK

Эта схема, так же как и центрально-разностная, имеет второй порядок аппроксимации, но в отличие от нее обладает противоположной направленностью, которая выражается в выборе используемого шаблона схемы в зависимости от направления потока.

Формулировка схемы QUICK для грани e в случае равномерной сетки имеет вид

$$\Phi_e^n = \begin{cases} -1/8 \cdot \Phi_{i-1,j,k}^n + 6/8 \cdot \Phi_{i,j,k}^n + 3/8 \cdot \Phi_{i+1,j,k}^n, & u_e > 0; \\ 3/8 \cdot \Phi_{i,j,k}^n + 6/8 \cdot \Phi_{i+1,j,k}^n - 1/8 \cdot \Phi_{i+2,j,k}^n, & u_e \leq 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

При использовании схемы QUICK возможны значения функции Φ , выходящие из области физически допустимых (для концентрации примеси), т.е. представленная схема не обладает свойством монотонности. Однако, как показывает практика, использование схемы Леонарда для расчета компонент скорости, возможно, и не приводит к неустойчивости схемы в целом [150].

Схема MLU

Для ее использования необходимо знать значения функции в двух предшествующих узлах сетки и в одном следующем (относительно узла (i, j, k) вдоль линии сетки по направлению потока). Значение искомой функции Φ на грани e определяется по формуле

$$\Phi_e^n = \begin{cases} \Phi_{i,j,k}^n + S_E^+ \cdot \frac{dx_i}{2}, & u_e > 0, \\ \Phi_{i+1,j,k}^n - S_E^- \cdot \frac{dx_i}{2}, & u_e \leq 0, \end{cases} \quad (3.22)$$

где $S_E^\pm = \min \text{mod} \left[(a_e + b_e^\pm) / 2, 2 \cdot \min \text{mod} [a_e, b_e^\pm] \right]$. Функция $\min \text{mod}$ определяется из соотношения

$$\min \text{mod} [a_e, b_e^\pm] = \begin{cases} a_e, & |a_e| \leq |b_e^\pm| \text{ and } a_e \cdot b_e^\pm > 0, \\ b_e^\pm, & |a_e| > |b_e^\pm| \text{ and } a_e \cdot b_e^\pm > 0, \\ 0, & a_e \cdot b_e^\pm < 0, \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\text{где } a_e = \frac{\Phi_{i+1,j,k}^n - \Phi_{i,j,k}^n}{dx_i}, \quad b_e^\pm = \begin{cases} \frac{\Phi_{i,j,k}^n - \Phi_{i-1,j,k}^n}{dx_{i-1}}, & u_e > 0, \\ \frac{\Phi_{i+2,j,k}^n - \Phi_{i+1,j,k}^n}{dx_{i+1}}, & u_e \leq 0. \end{cases}$$

Если сеточная функция $\Phi_{i,j,k}^n$ на рассматриваемом участке не является монотонной, то схема MLU ведет себя аналогично обычной противопотоковой схеме первого порядка, используя подветренное значение. Таким образом, эта схема в общем случае остается схемой первого порядка. Там, где характер изменения функции $\Phi_{i,j,k}^n$ монотонный, схема MLU обеспечивает второй порядок аппроксимации [125].

Для проведения дальнейших преобразований воспользуемся уравнением неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.24)$$

Запишем его в конечно-разностном виде (аналогичная запись для временного слоя $n-1$):

$$\begin{aligned} & (u_e^n - u_w^n) \cdot by_j \cdot bz_k + (v_n^n - v_s^n) \cdot bx_i \cdot bz_k + \\ & + (w_t^n - w_b^n) \cdot bx_i \cdot by_j = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Умножим (3.15) с n -го слоя на $-\Phi_{i,j,k}^n \frac{\Delta t_n 3}{2}$, а с $(n-1)$ -го

слоя – на $-\Phi_{i,j,k}^{n-1} \frac{\Delta t_n}{2}$ и подставим полученные выражения в (3.15),

умноженное на $bx_i by_j bz_k$, получим:

$$\begin{aligned}
 & \Phi_{i,j,k}^{n+1} \cdot bx_i \cdot by_j \cdot bz_k = \Phi_{i,j,k}^n \cdot bx_i \cdot by_j \cdot bz_k + \\
 & \left(\begin{aligned}
 & \left(\Gamma_e^n \cdot \frac{\Phi_{i+1,j,k}^n - \Phi_{i,j,k}^n}{dx_i} - \Gamma_w^n \cdot \frac{\Phi_{i,j,k}^n - \Phi_{i-1,j,k}^n}{dx_{i-1}} \right) \cdot by_j \cdot bz_k + \\
 & + \left(\Gamma_n^n \cdot \frac{\Phi_{i,j+1,k}^n - \Phi_{i,j,k}^n}{dy_j} - \Gamma_s^n \cdot \frac{\Phi_{i,j,k}^n - \Phi_{i,j-1,k}^n}{dy_{j-1}} \right) \cdot bx_i \cdot bz_k + \\
 & + \frac{\Delta t_n 3}{2} \left(\Gamma_t^n \cdot \frac{\Phi_{i,j,k+1}^n - \Phi_{i,j,k}^n}{dz_k} - \Gamma_b^n \cdot \frac{\Phi_{i,j,k}^n - \Phi_{i,j,k-1}^n}{dz_{k-1}} \right) \cdot bx_i \cdot by_j - \\
 & - \left(u_e^n \left(\Phi_e^n - \Phi_{i,j,k}^n \right) - u_w^n \left(\Phi_w^n - \Phi_{i,j,k}^n \right) \right) \cdot by_j \cdot bz_k - \\
 & - \left(v_n^n \left(\Phi_n^n - \Phi_{i,j,k}^n \right) - v_s^n \left(\Phi_s^n - \Phi_{i,j,k}^n \right) \right) \cdot bx_i \cdot bz_k - \\
 & - \left(w_t^n \left(\Phi_t^n - \Phi_{i,j,k}^n \right) - w_b^n \left(\Phi_b^n - \Phi_{i,j,k}^n \right) \right) \cdot bx_i \cdot by_j + S_{i,j,k}^n \cdot bx_i \cdot by_j \cdot bz_k
 \end{aligned} \right) - \\
 & \left(\begin{aligned}
 & \left(\Gamma_e^{n-1} \cdot \frac{\Phi_{i+1,j,k}^{n-1} - \Phi_{i,j,k}^{n-1}}{dx_i} - \Gamma_w^{n-1} \cdot \frac{\Phi_{i,j,k}^{n-1} - \Phi_{i-1,j,k}^{n-1}}{dx_{i-1}} \right) \cdot by_j \cdot bz_k + \\
 & + \left(\Gamma_n^{n-1} \cdot \frac{\Phi_{i,j+1,k}^{n-1} - \Phi_{i,j,k}^{n-1}}{dy_j} - \Gamma_s^{n-1} \cdot \frac{\Phi_{i,j,k}^{n-1} - \Phi_{i,j-1,k}^{n-1}}{dy_{j-1}} \right) \cdot bx_i \cdot bz_k + \\
 & - \frac{\Delta t_n}{2} \left(\Gamma_t^{n-1} \cdot \frac{\Phi_{i,j,k+1}^{n-1} - \Phi_{i,j,k}^{n-1}}{dz_k} - \Gamma_b^{n-1} \cdot \frac{\Phi_{i,j,k}^{n-1} - \Phi_{i,j,k-1}^{n-1}}{dz_{k-1}} \right) \cdot bx_i \cdot by_j - \\
 & - \left(u_e^{n-1} \left(\Phi_e^{n-1} - \Phi_{i,j,k}^{n-1} \right) - u_w^{n-1} \left(\Phi_w^{n-1} - \Phi_{i,j,k}^{n-1} \right) \right) \cdot by_j \cdot bz_k - \\
 & - \left(v_n^{n-1} \left(\Phi_n^{n-1} - \Phi_{i,j,k}^{n-1} \right) - v_s^{n-1} \left(\Phi_s^{n-1} - \Phi_{i,j,k}^{n-1} \right) \right) \cdot bx_i \cdot bz_k - \\
 & - \left(w_t^{n-1} \left(\Phi_t^{n-1} - \Phi_{i,j,k}^{n-1} \right) - w_b^{n-1} \left(\Phi_b^{n-1} - \Phi_{i,j,k}^{n-1} \right) \right) \cdot bx_i \cdot by_j + S_{i,j,k}^{n-1} \cdot bx_i by_j bz_k
 \end{aligned} \right)
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Продолжим преобразования, используя схему MLU для значений $\Phi_e^n, \Phi_w^n, \Phi_n^n, \Phi_s^n, \Phi_t^n, \Phi_b^n, \Phi_e^{n-1}, \Phi_w^{n-1}, \Phi_n^{n-1}, \Phi_s^{n-1}, \Phi_t^{n-1}, \Phi_b^{n-1}$. Также введем новые обозначения, сокращающие запись выражения (3.26) (аналогичные сокращения используются для $n-1$ слоя по времени):

$$\begin{aligned}
 F_e^n &= u_e^n \cdot by_j \cdot bz_k; & F_n^n &= v_n^n \cdot bx_i \cdot bz_k; \\
 F_t^n &= w_t^n \cdot bx_i \cdot by_j; \\
 F_w^n &= u_w^n \cdot by_j \cdot bz_k; & F_s^n &= v_s^n \cdot bx_i \cdot bz_k; \\
 F_b^n &= w_b^n \cdot bx_i \cdot by_j; \\
 D_e^n &= \frac{\Gamma_e^n}{dx_i} \cdot by_j \cdot bz_k; & D_n^n &= \frac{\Gamma_n^n}{dy_j} \cdot bx_i \cdot bz_k; \\
 D_t^n &= \frac{\Gamma_t^n}{dz_k} \cdot bx_i \cdot by_j; \\
 D_w^n &= \frac{\Gamma_w^n}{dx_{i-1}} \cdot by_j \cdot bz_k; & D_s^n &= \frac{\Gamma_s^n}{dy_{j-1}} \cdot bx_i \cdot bz_k; \\
 D_b^n &= \frac{\Gamma_b^n}{dz_{k-1}} \cdot bx_i \cdot by_j.
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Здесь F и D имеют следующий физический смысл: F показывает интенсивность конвекции, D – диффузионную проводимость через соответствующую грань конечного объема.

Результатом приближенного интегрирования по одному конечному объему является готовая для вычислений формула. Полученную систему линейных алгебраических уравнений относительно $\Phi_{i,j,k}$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
ap_{i,j,k}^0 \Phi_{i,j,k}^{n+1} &= ap_{i,j,k}^0 \Phi_{i,j,k}^n + \\
&+ \frac{3}{2} \left(\begin{aligned}
&ap_{i,j,k}^n \Phi_{i,j,k}^n + ae_{i,j,k}^n \Phi_{i+1,j,k}^n + an_{i,j,k}^n \Phi_{i,j+1,k}^n + \\
&+ at_{i,j,k}^n \Phi_{i,j,k+1}^n + \\
&+ aw_{i,j,k}^n \Phi_{i-1,j,k}^n + as_{i,j,k}^n \Phi_{i,j-1,k}^n + ab_{i,j,k}^n \Phi_{i,j,k-1}^n + \\
&+ b_{i,j,k}^n
\end{aligned} \right) - \\
&- \frac{1}{2} \left(\begin{aligned}
&ap_{i,j,k}^{n-1} \Phi_{i,j,k}^{n-1} + ae_{i,j,k}^{n-1} \Phi_{i+1,j,k}^{n-1} + an_{i,j,k}^{n-1} \Phi_{i,j+1,k}^{n-1} + \\
&+ at_{i,j,k}^{n-1} \Phi_{i,j,k+1}^{n-1} + \\
&+ aw_{i,j,k}^{n-1} \Phi_{i-1,j,k}^{n-1} + as_{i,j,k}^{n-1} \Phi_{i,j-1,k}^{n-1} + ab_{i,j,k}^{n-1} \Phi_{i,j,k-1}^{n-1} + \\
&+ b_{i,j,k}^{n-1}
\end{aligned} \right). \tag{3.28}
\end{aligned}$$

Для определения коэффициентов формулы (3.28) перепишем (3.26) с использованием обозначений (3.27), а затем приведем подобные и получим формулы для вычисления коэффициентов (3.28):

$$\begin{aligned}
& \Phi_{i,j,k}^{n+1} \cdot bx_i \cdot by_j \cdot bz_k = \Phi_{i,j,k}^n \cdot bx_i \cdot by_j \cdot bz_k + \\
& \left(\begin{aligned}
& -\Phi_{i,j,k}^n \left[D_e^n + \max(-F_e^n, 0) + D_n^n + \max(-F_n^n, 0) + D_t^n + \max(-F_t^n, 0) + \right. \\
& \left. + D_w^n + \max(F_w^n, 0) + D_s^n + \max(F_s^n, 0) + D_b^n + \max(F_b^n, 0) \right] + \\
& + \Phi_{i+1,j,k}^n \left[D_e^n + \max(-F_e^n, 0) \right] + \Phi_{i-1,j,k}^n \left[D_w^n + \max(F_w^n, 0) \right] + \\
& + \Phi_{i,j+1,k}^n \left[D_n^n + \max(-F_n^n, 0) \right] + \Phi_{i,j-1,k}^n \left[D_s^n + \max(F_s^n, 0) \right] + \\
& + \Phi_{i,j,k+1}^n \left[D_t^n + \max(-F_t^n, 0) \right] + \Phi_{i,j,k-1}^n \left[D_b^n + \max(F_b^n, 0) \right] - \\
& + \frac{\Delta t_n}{2} \left[-\max(F_e^n, 0)(S_e^+)^n \frac{dx_i}{2} - \max(-F_e^n, 0)(S_e^-)^n \frac{dx_i}{2} + \max(F_w^n, 0)(S_w^+)^n \frac{dx_{i-1}}{2} + \right. \\
& + \max(-F_w^n, 0)(S_w^-)^n \frac{dx_{i-1}}{2} - \max(F_n^n, 0)(S_n^+)^n \frac{dy_j}{2} - \max(-F_n^n, 0)(S_n^-)^n \frac{dy_j}{2} + \\
& + \max(F_s^n, 0)(S_s^+)^n \frac{dy_{j-1}}{2} + \max(-F_s^n, 0)(S_s^-)^n \frac{dy_{j-1}}{2} - \max(F_t^n, 0)(S_t^+)^n \frac{dz_k}{2} - \\
& - \max(-F_t^n, 0)(S_t^-)^n \frac{dz_k}{2} + \max(F_b^n, 0)(S_b^+)^n \frac{dz_{k-1}}{2} + \max(-F_b^n, 0)(S_b^-)^n \frac{dz_{k-1}}{2} + \\
& \left. + S_{i,j,k}^n \cdot bx_i \cdot by_j \cdot bz_k \right] - \\
& \left. \begin{aligned}
& -\Phi_{i,j,k}^{n-1} \left[D_e^{n-1} + \max(-F_e^{n-1}, 0) + D_n^{n-1} + \max(-F_n^{n-1}, 0) + D_t^{n-1} + \max(-F_t^{n-1}, 0) + \right. \\
& \left. + D_w^{n-1} + \max(F_w^{n-1}, 0) + D_s^{n-1} + \max(F_s^{n-1}, 0) + D_b^{n-1} + \max(F_b^{n-1}, 0) \right] + \\
& + \Phi_{i+1,j,k}^{n-1} \left[D_e^{n-1} + \max(-F_e^{n-1}, 0) \right] + \Phi_{i-1,j,k}^{n-1} \left[D_w^{n-1} + \max(F_w^{n-1}, 0) \right] + \\
& + \Phi_{i,j+1,k}^{n-1} \left[D_n^{n-1} + \max(-F_n^{n-1}, 0) \right] + \Phi_{i,j-1,k}^{n-1} \left[D_s^{n-1} + \max(F_s^{n-1}, 0) \right] + \\
& + \Phi_{i,j,k+1}^{n-1} \left[D_t^{n-1} + \max(-F_t^{n-1}, 0) \right] + \Phi_{i,j,k-1}^{n-1} \left[D_b^{n-1} + \max(F_b^{n-1}, 0) \right] - \\
& - \max(F_e^{n-1}, 0)(S_e^+)^{n-1} \frac{dx_i}{2} - \max(-F_e^{n-1}, 0)(S_e^-)^{n-1} \frac{dx_i}{2} + \\
& + \max(F_w^{n-1}, 0)(S_w^+)^{n-1} \frac{dx_{i-1}}{2} + \max(-F_w^{n-1}, 0)(S_w^-)^{n-1} \frac{dx_{i-1}}{2} - \\
& - \max(F_n^{n-1}, 0)(S_n^+)^{n-1} \frac{dy_j}{2} - \max(-F_n^{n-1}, 0)(S_n^-)^{n-1} \frac{dy_j}{2} + \\
& + \max(F_s^{n-1}, 0)(S_s^+)^{n-1} \frac{dy_{j-1}}{2} + \max(-F_s^{n-1}, 0)(S_s^-)^{n-1} \frac{dy_{j-1}}{2} - \\
& - \max(F_t^{n-1}, 0)(S_t^+)^{n-1} \frac{dz_k}{2} - \max(-F_t^{n-1}, 0)(S_t^-)^{n-1} \frac{dz_k}{2} + \\
& \left. + \max(F_b^{n-1}, 0)(S_b^+)^{n-1} \frac{dz_{k-1}}{2} + \max(-F_b^{n-1}, 0)(S_b^-)^{n-1} \frac{dz_{k-1}}{2} + S_{i,j,k}^{n-1} \cdot bx_i \cdot by_j \cdot bz_k \right]
\end{aligned} \right) \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Тогда коэффициенты для (3.28) будут вычисляться по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
ae_{i,j,k}^n &= D_e^n + \max(-F_e^n, 0); & aw_{i,j,k}^n &= D_w^n + \max(F_w^n, 0); \\
an_{i,j,k}^n &= D_n^n + \max(-F_n^n, 0); & as_{i,j,k}^n &= D_s^n + \max(F_s^n, 0); \\
at_{i,j,k}^n &= D_t^n + \max(-F_t^n, 0); & ab_{i,j,k}^n &= D_b^n + \max(F_b^n, 0); \\
ap_{i,j,k}^n &= -(ae_{i,j,k}^n + an_{i,j,k}^n + at_{i,j,k}^n + aw_{i,j,k}^n + as_{i,j,k}^n + ab_{i,j,k}^n); \\
b_{i,j,k}^n &= S_{i,j,k}^n \cdot bx_i \cdot by_j \cdot bz_k - \max(F_e^n, 0)(S_e^+)^n \frac{dx_i}{2} - \max(-F_e^n)(S_e^-)^n \frac{dx_i}{2} + \\
&+ \max(F_w^n, 0)(S_w^+)^n \frac{dx_{i-1}}{2} + \max(-F_w^n, 0)(S_w^-)^n \frac{dx_{i-1}}{2} - \max(F_n^n, 0)(S_n^+)^n \frac{dy_j}{2} - \\
&- \max(-F_n^n, 0)(S_n^-)^n \frac{dy_j}{2} + \max(F_s^n, 0)(S_s^+)^n \frac{dy_{j-1}}{2} + \max(-F_s^n, 0)(S_s^-)^n \frac{dy_{j-1}}{2} - \\
&- \max(F_t^n, 0)(S_t^+)^n \frac{dz_k}{2} - \max(-F_t^n, 0)(S_t^-)^n \frac{dz_k}{2} + \max(F_b^n, 0)(S_b^+)^n \frac{dz_{k-1}}{2} + \\
&+ \max(-F_b^n, 0)(S_b^-)^n \frac{dz_{k-1}}{2}; \\
ae_{i,j,k}^{n-1} &= D_e^{n-1} + \max(-F_e^{n-1}, 0); & aw_{i,j,k}^{n-1} &= D_w^{n-1} + \max(F_w^{n-1}, 0); \\
an_{i,j,k}^{n-1} &= D_n^{n-1} + \max(-F_n^{n-1}, 0); & as_{i,j,k}^{n-1} &= D_s^{n-1} + \max(F_s^{n-1}, 0); \\
at_{i,j,k}^{n-1} &= D_t^{n-1} + \max(-F_t^{n-1}, 0); & ab_{i,j,k}^{n-1} &= D_b^{n-1} + \max(F_b^{n-1}, 0); \\
ap_{i,j,k}^{n-1} &= -(ae_{i,j,k}^{n-1} + an_{i,j,k}^{n-1} + at_{i,j,k}^{n-1} + aw_{i,j,k}^{n-1} + as_{i,j,k}^{n-1} + ab_{i,j,k}^{n-1}); \\
b_{i,j,k}^{n-1} &= S_{i,j,k}^{n-1} \cdot bx_i \cdot by_j \cdot bz_k - \max(F_e^{n-1}, 0)(S_e^+)^{n-1} \frac{dx_i}{2} - \max(-F_e^{n-1})(S_e^-)^{n-1} \frac{dx_i}{2} + \\
&+ \max(F_w^{n-1}, 0)(S_w^+)^{n-1} \frac{dx_{i-1}}{2} + \max(-F_w^{n-1}, 0)(S_w^-)^{n-1} \frac{dx_{i-1}}{2} - \max(F_n^{n-1}, 0)(S_n^+)^{n-1} \frac{dy_j}{2} - \\
&- \max(-F_n^{n-1}, 0)(S_n^-)^{n-1} \frac{dy_j}{2} + \max(F_s^{n-1}, 0)(S_s^+)^{n-1} \frac{dy_{j-1}}{2} + \max(-F_s^{n-1}, 0)(S_s^-)^{n-1} \frac{dy_{j-1}}{2} - \\
&- \max(F_t^{n-1}, 0)(S_t^+)^{n-1} \frac{dz_k}{2} - \max(-F_t^{n-1}, 0)(S_t^-)^{n-1} \frac{dz_k}{2} + \max(F_b^{n-1}, 0)(S_b^+)^{n-1} \frac{dz_{k-1}}{2} + \\
&+ \max(-F_b^{n-1}, 0)(S_b^-)^{n-1} \frac{dz_{k-1}}{2}; \\
ap_{i,j,k}^0 &= \frac{bx_i \cdot by_j \cdot bz_k}{\Delta t_n}.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

В случае использования схемы QUICK или центрально-разностной схемы несложно таким же способом получить аналогичные выражения для коэффициентов формулы (3.28).

Ограничение на шаг интегрирования по времени

Шаг интегрирования по времени выбирался постоянным и определялся из ограничения на параболическое и гиперболическое числа Куранта [163]

$$\Delta t = 0,5 \cdot \min \left(\frac{h^2}{\alpha \nu}, \frac{h}{2U_{in}} \right).$$

Здесь $h = \min_{i,j,k}(hx_i, hy_j, hz_k)$ – минимальный шаг по пространству; $\alpha = \max_{i,j,k}(\nu_\tau/\nu)$ оценивалось эмпирически. Помимо этого, на каждой новой итерации по времени проверялось выполнение условия неотрицательности для суммы коэффициентов $ap_{i,j,k}^0 + ap_{i,j,k}^n$, вычисленных по формулам (3.28).

3.2.3 Алгоритм решения нестационарных уравнений Движения

Уравнения количества движения можно решать только в том случае, если поле давления задано или каким-либо образом найдено. Если при решении использовалось неверное поле давления, найденное поле скорости не будет удовлетворять уравнению неразрывности [49]. Поле скорости, получаемое с использованием поля давления p^n , выражается через u^* , v^* , w^* и определяется из следующей системы уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned}
ap_{i,j,k}^{0-u} \cdot u_e^* &= \left(ap_{i,j,k}^{0-u} - \frac{3}{2} \sum_{nb} (a_{i,j,k}^{nb-u})^n \right) \cdot u_e^n + \frac{1}{2} \sum_{nb} (a_{i,j,k}^{nb-u})^{n-1} \cdot u_e^{n-1} + \frac{3}{2} \sum_{nb} (a_{i,j,k}^{nb-u})^n \cdot u_{nb}^n - \\
&- \frac{1}{2} \sum_{nb} (a_{i,j,k}^{nb-u})^{n-1} \cdot u_{nb}^{n-1} + \frac{3}{2} (b_{i,j,k}^u)^n - \frac{1}{2} (b_{i,j,k}^u)^{n-1} + (p_{i,j,k}^n - p_{i+1,j,k}^n) \cdot by_j bz_k; \\
ap_{i,j,k}^{0-v} \cdot v_n^* &= \left(ap_{i,j,k}^{0-v} - \frac{3}{2} \sum_{nb} (a_{i,j,k}^{nb-v})^n \right) \cdot v_n^n + \frac{1}{2} \sum_{nb} (a_{i,j,k}^{nb-v})^{n-1} \cdot v_n^{n-1} + \frac{3}{2} \sum_{nb} (a_{i,j,k}^{nb-v})^n \cdot v_{nb}^n - \\
&- \frac{1}{2} \sum_{nb} (a_{i,j,k}^{nb-v})^{n-1} \cdot v_{nb}^{n-1} + \frac{3}{2} (b_{i,j,k}^v)^n - \frac{1}{2} (b_{i,j,k}^v)^{n-1} + (p_{i,j,k}^n - p_{i,j+1,k}^n) \cdot bx_i bz_k; \\
ap_{i,j,k}^{0-w} \cdot w_t^* &= \left(ap_{i,j,k}^{0-w} - \frac{3}{2} \sum_{nb} (a_{i,j,k}^{nb-w})^n \right) \cdot w_t^n + \frac{1}{2} \sum_{nb} (a_{i,j,k}^{nb-w})^{n-1} \cdot w_t^{n-1} + \frac{3}{2} \sum_{nb} (a_{i,j,k}^{nb-w})^n \cdot w_{nb}^n - \\
&- \frac{1}{2} \sum_{nb} (a_{i,j,k}^{nb-w})^{n-1} \cdot w_{nb}^{n-1} + \frac{3}{2} (b_{i,j,k}^w)^n - \frac{1}{2} (b_{i,j,k}^w)^{n-1} + (p_{i,j,k}^n - p_{i,j,k+1}^n) \cdot bx_i by_j,
\end{aligned} \right. \quad (3.32)$$

где \sum_{nb} означает суммирование по всем соседним узлам: $(i+1, j, k)$, $(i-1, j, k)$, $(i, j+1, k)$, $(i, j-1, k)$, $(i, j, k+1)$, $(i, j, k-1)$.

В данной работе рассматривается способ получения поля p^{n+1} из условия, чтобы результирующее поле скорости u^{n+1} , v^{n+1} , w^{n+1} удовлетворяло уравнению неразрывности. Пусть искомое давление находится из соотношения $p^{n+1} = p^n + p'$, где p' – поправка давления. Надо выяснить, как будут меняться составляющие скорости в зависимости от изменения поправки давления. По аналогии с поправкой давления вводятся поправки скорости: $u^{n+1} = u^* + u'$, $v^{n+1} = v^* + v'$, $w^{n+1} = w^* + w'$.

С учетом (3.32) можно получить поправочные формулы для компонент скорости, выраженные через поправку давления. Для этого, вычитая из уравнений (3.32) систему с истинными компонентами скорости u^{n+1} , v^{n+1} , w^{n+1} (имеющую тот же вид, что и система (3.32), только со значениями давления p^{n+1}), можно получить поправочные формулы для скорости:

$$\begin{aligned}
u_e^{n+1} &= u_e^* + (p'_{i,j,k} - p'_{i+1,j,k})d_e; \\
v_n^{n+1} &= v_n^* + (p'_{i,j,k} - p'_{i,j+1,k})d_n; \\
w_t^{n+1} &= w_t^* + (p'_{i,j,k} - p'_{i,j,k+1})d_t;
\end{aligned} \tag{3.33}$$

где $d_e = by_j bz_k / ap_{i,j,k}^{0-u}$, $d_n = bx_i bz_k / ap_{i,j,k}^{0-v}$, $d_t = bx_i by_j / ap_{i,j,k}^{0-w}$.

Интегрируя уравнение неразрывности по конечному объему, можно с использованием (3.33) получить его дискретный аналог в виде уравнения для поправки давления, если компоненты скорости u_e^{n+1} , u_w^{n+1} , v_n^{n+1} , v_s^{n+1} , w_t^{n+1} , w_b^{n+1} из поправочных формул (3.33) подставить в выражение

$$(u_e^{n+1} - u_w^{n+1}) \cdot by_j \cdot bz_k + (v_n^{n+1} - v_s^{n+1}) \cdot bx_i \cdot bz_k + (w_t^{n+1} - w_b^{n+1}) \cdot bx_i \cdot by_j = 0$$

и потребовать, чтобы уравнение неразрывности выполнялось точно.

Тогда, приведя подобные слагаемые, можно получить дискретный аналог уравнения неразрывности в виде

$$\begin{aligned}
bp_{i,j,k} p'_{i,j,k} &= be_{i,j,k} p'_{i,j,k} + bn_{i,j,k} p'_{i,j+1,k} + bt_{i,j,k} p'_{i,j,k+1} + \\
&+ bw_{i,j,k} p'_{i-1,j,k} + bs_{i,j,k} p'_{i,j-1,k} + bb_{i,j,k} p'_{i,j,k-1} + f_{i,j,k}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Коэффициенты полученной системы вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
be_{i,j,k} &= d_e \cdot by_j bz_k; & bw_{i,j,k} &= d_w \cdot by_j bz_k; \\
bn_{i,j,k} &= d_n \cdot bx_i bz_k; & bs_{i,j,k} &= d_s \cdot bx_i bz_k; \\
bt_{i,j,k} &= d_t \cdot bx_i by_j; & bb_{i,j,k} &= d_b \cdot bx_i by_j;
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$bp_{i,j,k} = be_{i,j,k} + bn_{i,j,k} + bt_{i,j,k} + bw_{i,j,k} + bs_{i,j,k} + bb_{i,j,k};$$

$$-f_{i,j,k} = (u_e^* - u_w^*)by_j bz_k + (v_n^* - v_s^*)bx_i bz_k + (w_t^* - w_b^*)bx_i by_j.$$

В гидродинамической части модели для согласования полей скорости и давления использовалась схема предиктор–корректор, в соответствии с которой явная схема (3.32) для уравнения движения выполняла функцию предиктора, а коррекция поля скорости осуществлялась на основе решения уравнения (3.34) для поправок дав-

ления. Описанная схема включает в себя следующую последовательность операций на каждом шаге по времени:

1. Задание начальных приближений для всех зависимых переменных u^n, v^n, w^n, p^n и $u^{n-1}, v^{n-1}, w^{n-1}$.

2. Вычисление приближенных значений скорости u^*, v^*, w^* по готовым формулам (3.32) с коэффициентами, рассчитанными по формулам (3.30).

3. Решение уравнения (3.34) для поправки давления p' .

4. Определение нового поля давления в виде $p^{n+1} = p^n + p'$.

5. Вычисление скоростей $u^{n+1}, v^{n+1}, w^{n+1}$ с помощью формул (3.33).

6. Фильтрация поля скорости, если того требует используемая подсеточная модель, и вычисление характеристик подсеточного моделирования.

7. Решение дискретного аналога для концентрации или температуры.

8. Принятие полученных значений зависимых переменных в качестве исходных и переход на следующий шаг по времени с повторением операций, начиная со второй, если не превышено время моделирования, иначе выход из цикла.

3.2.4 Численная реализация динамической модели

На первом шаге по времени используются значения константы Смагоринского $C_s = 0,13$ для вычисления турбулентной вязкости. Далее на основании вычисленных значений компонент фильтрованной скорости $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ реализуется расчет динамического коэффициента турбулентной вязкости.

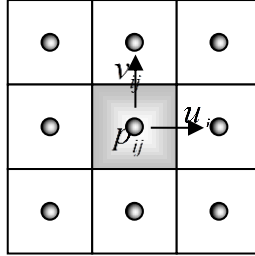


Рисунок 3.4 – Фрагмент вычислительной сетки

Для получения параметра $C = C_s^2$ из формулы (1.57) величины L_{ij} и m_{ij} должны быть вычислены в каждой сеточной ячейке. Однако так как для расчетов использовалась разнесённая сетка (рису. 3.4), три компоненты скорости рассчитывались на различных гранях конечного объема. Для вычисления всех промежуточных результатов, необходимых для получения L_{ij} и m_{ij} , была использована процедура интерполяции.

В данной работе все компоненты скорости и тензора напряжений интерполировались к центру ячейки (рис. 3.5). Таким образом, для каждой компоненты скорости требуется завести вспомогательный массив $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$, содержащий интерполированные к центру значения компонент скорости, а затем отфильтровать полученные значения с использованием одного из следующих фильтров, предложенных в работах [47,51]:

$$\hat{a}_i = \frac{1}{4}a_{i-1} + \frac{1}{2}a_i + \frac{1}{4}a_{i+1}, \quad \hat{a}_i = \frac{1}{6}a_{i-1} + \frac{4}{6}a_i + \frac{1}{6}a_{i+1}, \quad (3.36)$$

где a – подлежащая фильтрации величина. Для фильтрации трехмерных полей фильтр применяется последовательно по всем трем координатам.

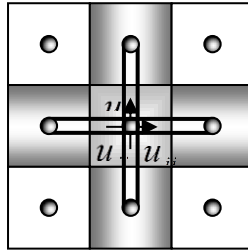


Рисунок 3.5 – Схематическое представление сеточного (по одной ячейке) и тестового (по пяти узлам) фильтров и интерполяции используемых переменных для вычисления C

Тем самым получены фильтрованные тестовым фильтром значения компонент скорости в центрах ячеек $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$. Тогда для $L_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \hat{u}_i \hat{u}_j$ может быть вычислено второе слагаемое $\hat{u}_i \hat{u}_j$, и остается вычислить фильтрованные значения произведения компонент скорости $\bar{u}_i \bar{u}_j$. Для этого в расчетах требуется задание шести трехмерных массивов L_{ij} , где L_{ij} на первом этапе вычислений определялось следующим образом: $L_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j$. После фильтрации величины L_{ij} тестовым фильтром (3.36) можно приступить к вычислению значения $\bar{u}_i \bar{u}_j - \hat{u}_i \hat{u}_j$ в каждой точке расчетной области, как $L_{ij} = L_{ij} - \hat{u}_i \hat{u}_j$.

На следующем этапе необходимо вычислить $m_{ij} = -2\Delta^2 \left| \hat{S} \right| \hat{S}_{ij} + 2\Delta^2 \left| \bar{S} \right| \bar{S}_{ij}$ в каждой точке расчетной области.

Вычисление величины $\left| \hat{S} \right| \hat{S}_{ij}$ по формулам $\hat{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} \right)$

и $\left| \hat{S} \right| = \left(2\hat{S}_{ij}\hat{S}_{ij} \right)^{1/2}$ связано с интерполяцией значений фильтрованной скорости на грани конечного объема для расчета \hat{S}_{ij} в центре ячейки.

Для вычисления второго слагаемого $\left| \bar{S} \right| \bar{S}_{ij}$ потребуется создание шести вспомогательных массивов m_{ij} . На первом этапе вычислений необходимо определить $m_{ij} = \left| \bar{S} \right| \bar{S}_{ij}$. После фильтрации величины m_{ij} тестовым фильтром (3.36) можно приступить к вычислению значения $-2\hat{\Delta}^2 \left| \hat{S} \right| \hat{S}_{ij} + 2\Delta^2 \left| \bar{S} \right| \bar{S}_{ij}$ в каждой точке расчетной области, как $m_{ij} = -2\hat{\Delta}^2 \left| \hat{S} \right| \hat{S}_{ij} + 2\Delta^2 m_{ij}$ или

$$m_{ij} = 2\Delta^2 \left(-\alpha \left| \hat{S} \right| \hat{S}_{ij} + m_{ij} \right).$$

Последним тонким моментом численной реализации динамической модели является задание отношения $\alpha = \frac{\hat{\Delta}^2}{\Delta^2}$. В работах [47,131,164] значение α выбирается равным 4, а также указывается, что оно может служить настроечным фиксированным параметром.

3.2.5 К выбору метода решения сеточных уравнений

Прямые методы вроде метода исключения Гаусса, как правило, не используются для решения систем линейных алгебраических уравнений вида (3.34), полученных после аппроксимации дифференциальной задачи, так как эти методы не учитывают структуру матрицы, вынуждая хранить ее целиком, что делает нерациональным использование оперативной памяти, а также подвержены влиянию вычислительной погрешности округления. Исключение составляет метод Фурье [143], но он не применим для решения задач со сложной геометрией и в связи с этим в данной работе рассматри-

ваться не будет. Поэтому обратимся к итерационным методам решения систем линейных алгебраических уравнений. Их главными достоинствами являются рекордная практическая экономичность, высокие теоретические оценки сходимости последовательных приближений и широкие возможности конструирования адаптивных алгоритмов для различных классов задач. Рассмотрим четыре метода: метод Зейделя, метод сопряженных градиентов, стабилизированный метод бисопряженных градиентов и явный метод Булеева для того, чтобы выбрать оптимальный как с точки зрения количества итераций, требуемых для сходимости метода, и времени на вычисления, так и с точки зрения возможностей масштабирования распараллеленного метода на большое количество вычислительных узлов.

Метод Зейделя

Для рассматриваемой задачи (3.34) формулы метода Зейделя примут следующий вид:

$$(x_{i,j,k})^{m+1} = \frac{1}{bp_{i,j,k}} \left(\begin{array}{l} f_{i,j,k} + be_{i,j,k} (x_{i+1,j,k})^m + bw_{i,j,k} (x_{i-1,j,k})^{m+1} + \\ + bn_{i,j,k} (x_{i,j+1,k})^m + bs_{i,j,k} (x_{i,j-1,k})^{m+1} + \\ + bt_{i,j,k} (x_{i,j,k+1})^m + bb_{i,j,k} (x_{i,j,k-1})^{m+1} \end{array} \right) \quad (3.37)$$

$$i = 0, \dots, Nx+1; \quad j = 0, \dots, Ny+1; \quad k = 0, \dots, Nz+1,$$

где m – номер итерации метода, а $x_{i,j,k} = p'_{i,j,k}$.

Этот метод относится к классу треугольных методов. В [142] показано, что метод Зейделя для решения системы $Ax = b$ всегда сходится, если A – симметричная положительно определенная матрица. Причем можно утверждать, что метод Зейделя сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q < 1$, если выполняется условие строгого диагонального преобладания, т.е.

$$|be| + |bw| + |bn| + |bs| + |bt| + |bb| \leq q|bp|, \quad q < 1. \quad (3.38)$$

Метод сопряженных градиентов

Одними из перспективных методов итерационного решения систем вида $Ax = b$ являются алгоритмы, построенные на основе выбо-

ра итерационных параметров из условия минимизации функционалов, определяющих точность текущих последовательных приближений.

К открытию метода сопряженных градиентов (Conjugate Gradients) независимо пришли М. Хестенес и Э. Штифель. Он является наиболее предпочтительным по быстродействию для симметричных положительно определенных систем. Формулы классического метода сопряженных градиентов имеют следующий вид.

Задаются начальные данные:

x^0 – начальное приближение;

$r^0 = b - Ax^0$;

$p^0 = r^0$.

Затем стартует итерационный процесс, который продолжается до тех пор, пока не будут выполнены условия сходимости:

$v^m = Ap^m$;

$\alpha_m = \frac{(r^m, r^m)}{(p^m, v^m)}$;

$x^{m+1} = x^m + \alpha_m p^m$; если x^m достаточно точное, то

остановка; (3.39)

$r^{m+1} = r^m - \alpha_m v^m$;

$\beta_m = \frac{(r^{m+1}, r^{m+1})}{(r^m, r^m)}$;

$p^{m+1} = r^{m+1} + \beta_m p^m$.

Достаточным условием сходимости метода сопряженных градиентов являются симметричность и положительная определенность матрицы A , при этом если для спектра матрицы выполняется условие $0 < \mu \leq \gamma(A) \leq M$, то скорость сходимости можно определить по формуле

$$\phi(x^m) \leq \left(\frac{2 \cdot \gamma^m}{1 + \gamma^{2m}} \right) \phi(x^0), \quad \gamma = \frac{1 - \sqrt{\mu/M}}{1 + \sqrt{\mu/M}}, \quad (3.40)$$

где $\phi(x^m)$ – погрешность на m -й итерации. Скорость сходимости метода сопряженных градиентов выше, чем скорость сходимости метода Зейделя.

Стабилизирующий метод бисопряженных градиентов

Стабилизирующий метод бисопряжённых градиентов был разработан для решения несимметрических линейных систем уравнений, причем он избегает нерегулярных приближений «квадратичного» метода сопряжённых градиентов [165].

Ван дер Ворст [165] вместо вычисления последовательности r^m по формуле $r^m = P_m^2(A)r^0$, где r^m – модуль вектора невязки, который равен $r^m = b - Ax^m$, предложил искать эту последовательность в виде $r^m = Q_m(A)P_m(A)r^0$, где $Q_m(A), P_m(A)$ – полиномы m -й степени от A вида $Q_m = \prod_{j=1}^m (I - \omega_j A)$. Параметры ω_j выбираются

из требования минимума невязки r_j на каждом итерационном шаге.

Алгоритм метода BiCGStab реализуется следующим образом. Задаются начальные данные:

x^0 – начальное приближение;

$r^0 = b - Ax^0$;

$\rho_0 = \alpha = \omega_0 = 1$;

$v^0 = p^0 = 0$;

\hat{r}^0 – произвольный вектор, для которого $(\hat{r}^0, r^0) \neq 0$, например:

$\hat{r}^0 = r^0$.

Затем стартует итерационный процесс, который продолжается до тех пор, пока не будут выполнены условия сходимости:

$$\begin{aligned} \rho_m &= (\hat{r}^0, r^{m-1}); \\ \beta_m &= (\rho_m / \rho_{m-1})(\alpha / \omega_{m-1}); \end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
p^m &= r^{m-1} + \beta_m (p^{m-1} - \omega_{m-1} v^{m-1}); \\
v^m &= Ap^m; \\
\alpha &= \rho_m / (\hat{r}^0, v^m); \\
s &= r^{m-1} - \alpha v^m; \\
t &= As; \\
\omega_m &= (t, s) / (t, t); \\
x^m &= x^{m-1} + \alpha p^m + \omega_m s; \text{ если } x^m \text{ достаточно} \\
&\text{точное, то остановка;} \\
r^i &= s - \omega_i t.
\end{aligned}$$

Для эффективного использования памяти обновление текущего решения x производится на одном итерационном шаге, в то время как обновление к невязке r должно быть сделано отдельно ($s = r^m$ и $r^m = s - \omega_m t$). Таким образом, s представляет невязку после «Vi-CG шага» и вычисления могут закончиться, когда $\|s\|$ достаточно мала, но только в том случае, если перед окончанием алгоритма текущее решение пересчитается как $x^m = x^{m-1} + \alpha p^m$ для того, чтобы соответствовать текущей невязке (и вычисления t , ω_m , а также второе обновление ω_m должно быть пропущено).

Явный метод Булеева

Идея этого метода опирается на принцип построения знаменитого безытерационного метода прогонки для решения систем уравнений с трехдиагональными матрицами [166].

Для решения системы линейных алгебраических уравнений с ленточной семидиагональной матрицей (3.34), приведенной к виду

$$\begin{aligned}
bp_{i,j,k} x_{i,j,k} &= be_{i,j,k} x_{i+1,j,k} + bn_{i,j,k} x_{i,j+1,k} + bt_{i,j,k} x_{i,j,k+1} + \\
&+ bw_{i,j,k} x_{i-1,j,k} + bs_{i,j,k} x_{i,j-1,k} + bb_{i,j,k} x_{i,j,k-1} + f_{i,j,k},
\end{aligned} \tag{3.42}$$

решение ищется по формуле

$$x_{i,j,k} = P_{i,j,k}x_{i+1,j,k} + Q_{i,j,k}x_{i,j+1,k} + R_{i,j,k}x_{i,j,k+1} + T_{i,j,k}, \quad (3.43)$$

где $P_{i,j,k}$, $Q_{i,j,k}$, $R_{i,j,k}$, $T_{i,j,k}$ – некоторые неизвестные пока значения, называемые прогоночными коэффициентами.

Из (3.43) можно получить выражения для $x_{i-1,j,k}$, $x_{i,j-1,k}$, $x_{i,j,k-1}$:

$$\begin{aligned} x_{i-1,j,k} &= P_{i-1,j,k}x_{i,j,k} + Q_{i-1,j,k}x_{i-1,j+1,k} + R_{i-1,j,k}x_{i-1,j,k+1} + T_{i-1,j,k}; \\ x_{i,j-1,k} &= P_{i,j-1,k}x_{i+1,j-1,k} + Q_{i,j-1,k}x_{i,j,k} + R_{i,j-1,k}x_{i,j-1,k+1} + T_{i,j-1,k}; \\ x_{i,j,k-1} &= P_{i,j,k-1}x_{i+1,j,k-1} + Q_{i,j,k-1}x_{i,j+1,k-1} + R_{i,j,k-1}x_{i,j,k} + T_{i,j,k-1}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Затем, подставив выражения (3.44) в (3.42), приводим полученное выражение к виду (3.43). Тогда формулы для прогоночных коэффициентов примут вид

$$\left\{ \begin{aligned} P_{i,j,k} &= be_{i,j,k} / \text{sum}; \\ Q_{i,j,k} &= bn_{i,j,k} / \text{sum}; \\ R_{i,j,k} &= bt_{i,j,k} / \text{sum}; \\ T_{i,j,k} &= (bw_{i,j,k}(Q_{i-1,j,k}x_{i-1,j+1,k} + R_{i-1,j,k}x_{i-1,j,k+1} + T_{i-1,j,k}) + \\ &\quad + bs_{i,j,k}(P_{i,j-1,k}x_{i+1,j-1,k} + R_{i,j-1,k}x_{i,j-1,k+1} + T_{i,j-1,k}) + \\ &\quad + bb_{i,j,k}(P_{i,j,k-1}x_{i+1,j,k-1} + Q_{i,j,k-1}x_{i,j+1,k-1} + T_{i,j,k-1}) + \\ &\quad + f_{i,j,k}) / \text{sum}; \\ \text{sum} &= bp_{i,j,k} - bw_{i,j,k}P_{i-1,j,k} - bs_{i,j,k}Q_{i,j-1,k} - bb_{i,j,k}R_{i,j,k-1}. \end{aligned} \right. \quad (3.45)$$

Таким образом, каждая итерация состоит из двух этапов: прямого и обратного хода. Во время прямого хода вычисляются значения прогоночных коэффициентов по формулам (3.45), при этом значения $x_{i,j,k}$, входящие в выражения для $T_{i,j,k}$, берутся с предыдущей итерации. Об-

ратный ход состоит из расчета величин сеточной функции по формуле (3.43).

В приведенном варианте алгоритма фактически пересчет узлов можно вести различными способами: по строкам, столбцам или диагоналям сетки – вычисления будут одинаковыми. Нужно только, чтобы при обработке текущего узла на прямом или обратном ходе уже были пересчитаны сеточные функции в его соседних узлах, использующихся в соответствующем рекуррентном выражении.

Метод Булеева сходится при любом приближении, если матрица системы (3.30) имеет диагональное преобладание.

Об использовании предобуславливателей

Для большинства итерационных методов скорость сходимости зависит от числа обусловленности матрицы A или от распределения собственных значений. Предобуславливание означает, что система $Ax = b$ заменяется системой $M^{-1}Ax = M^{-1}b$, где матрица M есть приближение к A со следующими свойствами:

1. M симметрична и положительно определена.
2. Матрица $M^{-1}A$ хорошо обусловлена.
3. Система $Mx = b$ решается легко.

Продуманный, зависящий от конкретной задачи выбор M может сделать число обусловленности матрицы $M^{-1}A$ много меньше числа обусловленности матрицы A и тем самым существенным образом ускорить сходимость итерационного метода. В действительности хороший предобуславливатель часто необходим для того, чтобы итерационный процесс вообще сошелся. Поэтому большая часть современных исследований по итерационным методам ориентирована на отыскание эффективных предобуславливателей [166].

В работе [167] рассматривается три предобуславливателя для решения систем линейных алгебраических уравнений с разреженными матрицами: метод Холецкого, LU-декомпозиции и метод неполной факторизации Булеева. Показано, что применение последнего для численного решения эллиптических уравнений дает несомненное преимущество. В данной работе для предобуславливания методов сопряженных направлений используется метод Зейделя или

явный метод Булеева. В табл. 3.1 представлены алгоритмы CG и BiCGStab с предобуславливанием.

Далее будут описаны результаты сравнения предложенных итерационных методов и показано влияние использования предобуславливателей на время вычислений и на количество итераций, требующихся для сходимости метода.

Таблица 3.1 – Использование предобуславливателей в методе сопряженных градиентов и стабилизирующем методе бисопряженных градиентов

Метод сопряженных градиентов (CG)	Стабилизирующий метод бисопряженных градиентов (BiCGStab)
Перед началом итерационного процесса задаются входные данные:	
x^0 – начальное приближение; $r^0 = b - Ax^0$; $z^0 = M^{-1}r^0$; $p^0 = z^0$	x^0 – начальное приближение; $r^0 = b - Ax^0$; \hat{r}^0 – произвольный вектор, для которого $(\hat{r}^0, r^0) \neq 0$, например, $\hat{r}^0 = r^0$; $\rho_0 = \alpha = \omega_0 = 1$; $v^0 = p^0 = 0$
Затем стартует итерационный процесс, который продолжается до тех пор, пока не будут выполнены условия сходимости:	
$v^m = Ap^m$; $\alpha_m = \frac{(r^m, z^m)}{(p^m, v^m)}$; $x^{m+1} = x^m + \alpha_m p^m$; если x^m довольно точное, то остановка; $r^{m+1} = r^m - \alpha_m v^m$; $z^{m+1} = M^{-1}r^{m+1}$; $\beta_n = -\frac{(r^{m+1}, z^{m+1})}{(r^m, z^m)}$; $p^{m+1} = r^{m+1} + \beta_m p^m$	$\rho_m = (\hat{r}^0, r^{m-1})$; $\beta_m = (\rho_m / \rho_{m-1})(\alpha / \omega_{m-1})$; $p^m = r^{m-1} + \beta(p^{m-1} - \omega_{m-1}v^{m-1})$; $y = M^{-1}p^m$; $v^m = Ay$; $\alpha = \rho_m / (\hat{r}^0, v^m)$; $s = r^{m-1} - \alpha v^m$; $z = M^{-1}s$; $t = Az$; $\omega_m = (t, s) / (t, t)$; $x^m = x^{m-1} + \alpha p^m + \omega_m s$; если x^m довольно точное, то остановка; $r^m = s - \omega_m t$
M – предобуславливающая матрица	

3.2.6 Тестирование численного метода

Тестирование вычислительного алгоритма проводилось на задаче исследования течения в плоском канале при низких числах Рей-

нольда. Рассматривался ламинарный поток вязкой несжимаемой жидкости между двумя пластинами.

Профиль скорости в начальном участке плоского канала можно определить с помощью приближенного аналитического решения, полученного С.М. Таргом [168]:

$$\frac{u(x_1, x_3)}{U_{in}} = \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{x_3}{h} \right)^2 \right] - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^2} \left[1 - \frac{\cos\left(\gamma_n \cdot \frac{x_3}{h}\right)}{\cos(\gamma_n)} \right] \exp\left(-\frac{\nu}{U_{in}} \cdot \frac{\gamma_n^2}{h^2} x_1\right), \quad (3.46)$$

где U_{in} – скорость на входе в канал; $2h$ – ширина канала; ν – динамическая вязкость; γ_n – последовательные корни уравнения $\text{tg}(x) = x$.

Полученные с использованием данного метода результаты расчетов для начального участка представлены на рис. 3.6. При $x_1 > 0,18h\text{Re}$ профиль скорости приобретает параболический характер, соответствующий установившемуся ламинарному течению ($\text{Re} = U_{in} \cdot 2h / \nu$).



Рисунок 3.6 – Распределение осевых скоростей ламинарного течения в начальном участке канала, образованного параллельными пластинами ($\text{Re} = 200$)

На рис. 3.7 представлено распределение продольной компоненты скорости вдоль оси Ox_1 . Видно, что наблюдается хороший уровень соответствия данных численного моделирования и аналитического решения для рассматриваемой задачи, хотя вблизи от входа в канал

имеют место небольшие различия в распределении продольной компоненты скорости для аналитического решения и решения, полученного численно. По-видимому, это обусловлено тем, что при получении аналитического решения во входной части распределение скорости определялось из уравнения пограничного слоя, а не на основе полных уравнений гидродинамики для несжимаемой жидкости.

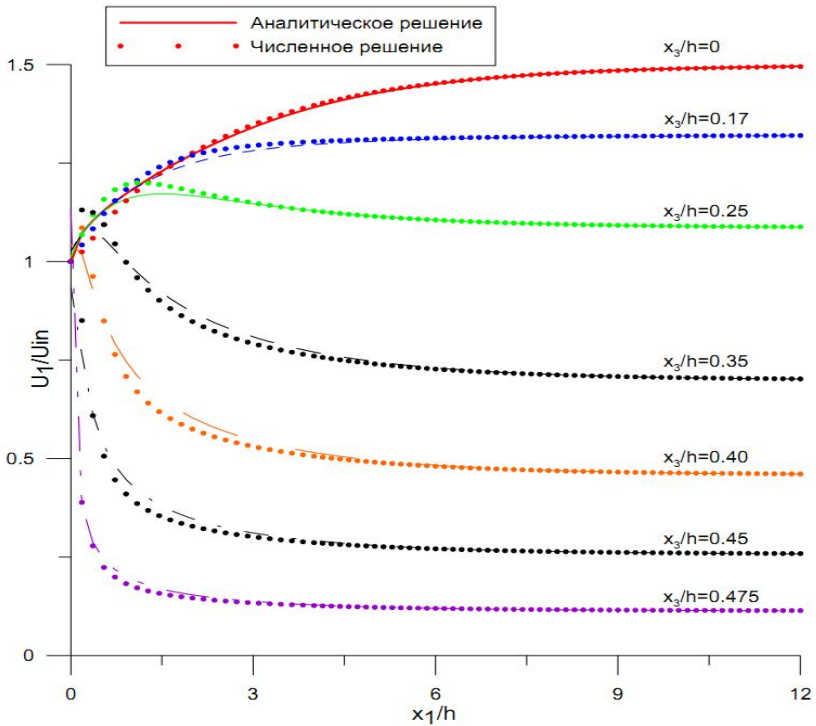


Рисунок 3.7 – Распределение скоростей ламинарного течения в начальном участке канала, образованного параллельными пластинами ($Re = 200$)

3.3 Параллельная реализация численного метода решения разностной задачи

3.3.1 Подходы к распараллеливанию численного метода решения адвективно-диффузионного уравнения

Задачи математического моделирования турбулентности требуют большого количества компьютерного времени. Одним из способов преодоления этой проблемы является использование многопроцессорных вычислительных систем. В данной работе будут рассматриваться параллельные алгоритмы для многопроцессорных вычислительных систем с распределенной памятью, так как в настоящее время большинство суперЭВМ, которыми мы располагаем, построены именно по такому принципу.

Сравнение различных способов распараллеливания рассмотренного явного алгоритма решения нестационарных уравнений Навье–Стокса с целью отыскания оптимального с точки зрения минимизации затрат на пересылку данных проводилось на примере одного адвективно-диффузионного уравнения. Требуется решить трехмерное уравнение переноса в единичном кубе $(x, y, z) \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial(u\Phi)}{\partial x} + \frac{\partial(v\Phi)}{\partial y} + \frac{\partial(w\Phi)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] + S \quad (3.47)$$

с граничными условиями второго рода и заданными начальными условиями

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0; & \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=0} &= 0; & \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0; & \Phi|_{t=0} &= 0; \\ \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=1} &= 0; & \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=1} &= 0; & \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=1} &= 0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Функции $u, v, w, \Gamma > 0$ и S определены в рассматриваемой области, причем $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$. Сформулированная задача решается численно представленным в п. 3.3 методом.

В качестве основного подхода распараллеливания выбрана геометрическая декомпозиция сеточной области. В рассматриваемом случае возможны три различных способа (рис. 3.8) разделения значений сеточной функции по процессорным элементам (ПЭ) – одномерная, или ленточная, схема; двумерное, или блочное, разбиение или трехмерное разбиение узлов вычислительной сетки.

Каждому процессорному элементу вместе с выделенной сеточной под областью распределяются все значения сеточной функции $\Phi_{i,j,k}^n$, принадлежащие этой под области [169].

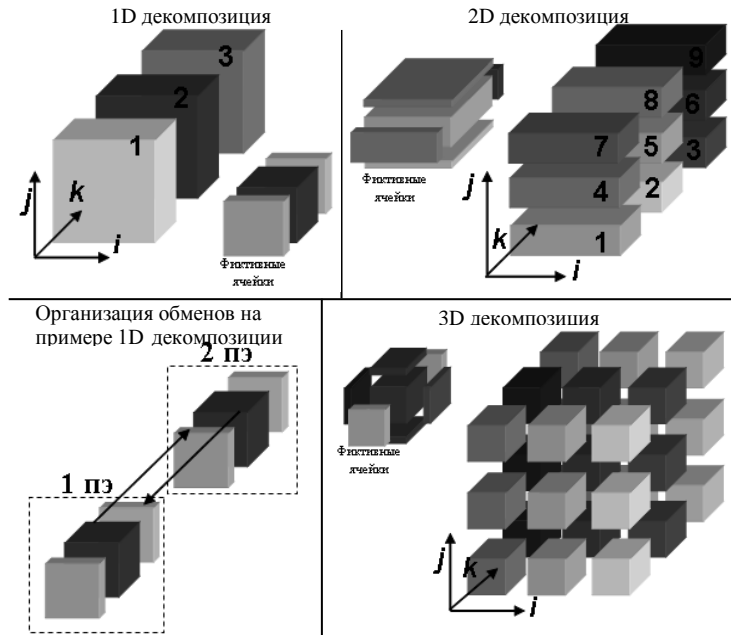


Рисунок 3.8 – Различные способы декомпозиции. Схема организации обменов для 1D-декомпозиции

После этапа декомпозиции, когда производится разделение данных на блоки для построения параллельного алгоритма, переходим к этапу установления связей между блоками, вычисления в которых будут выполняться параллельно, – планированию коммуникаций. Из-за используемого шаблона явной разностной схемы для вычисления очередного приближения в приграничных узлах каждой подобласти необходимо знать значения сеточной функции с соседнего граничащего процессорного элемента. Для этого на каждом вычислительном узле создаются фиктивные ячейки для хранения данных с соседнего вычислительного узла и организуются пересылки этих граничных значений, необходимых для обеспечения однородности вычислений по явным формулам (3.28) [169].

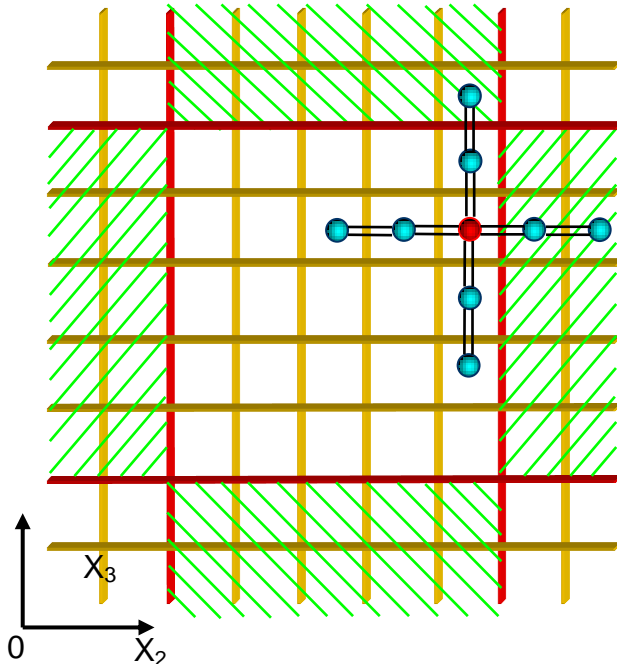


Рисунок 3.9 – Шаблон разностной схемы в координатной плоскости X_2OX_3

Обратимся к предварительному теоретическому анализу эффективности различных способов декомпозиции расчетной области для рассматриваемого случая. Будем оценивать время работы параллельной программы как время работы последовательной программы T_{calc} , деленное на количество используемых процессорных элементов, плюс время пересылок: $T_p = T_{calc} / p + T_{com}$. Время пересылок для различных способов декомпозиции можно приблизительно выразить через количество пересылаемых данных:

$$\begin{aligned} T_{com}^{1D} &= t_{send} \cdot 2N^2 \times 2, \quad T_{com}^{2D} = t_{send} \cdot 2N^2 \times 4 / p^{1/2}, \\ T_{com}^{3D} &= t_{send} \cdot 2N^2 \times 6 / p^{2/3}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

где N^3 – размер конечно-разностной задачи; p – количество процессорных элементов; t_{send} – время пересылки одного числа.

Из формулы (3.49) видно, что для различных способов декомпозиции затраты на пересылку данных можно представить в виде $T_{com} = t_{send} \cdot 2N^2 \times k(p)$, где коэффициент пропорциональности $k(p)$ зависит от способа декомпозиции и числа используемых процессорных элементов.

В табл. 3.2 представлены числовые значения $k(p)$. Видно, что при $p > 5$ более эффективными будут 2D- и 3D-декомпозиции, а при $p > 11$ в случае 3D-декомпозиции потребуется пересылать между процессорными элементами меньшее количество сеточных значений функции $\Phi_{i,j,k}^n$, и можно ожидать, что в этом случае затрачиваемое на пересылку время будет минимально.

Таблица 3.2 – Зависимость коэффициента пропорциональности $k(p)$ от числа процессорных элементов и способа декомпозиции

Число процессоров	3	4	5	6	10	11	12	16	60	120	250
1d-декомпозиция	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2d-декомпозиция	2,31	2,00	1,79	1,63	1,26	1,20	1,15	1,00	0,51	0,36	0,25
3d-декомпозиция	2,88	2,38	2,05	1,82	1,29	1,21	1,14	0,94	0,39	0,24	0,15

Параллельная программа представляет собой множество процессов, каждый из которых имеет свое собственное локальное адресное пространство. Взаимодействие процессов – обмен данными и синхронизация – осуществляется посредством передачи сообщений. Общине и стандартизация различных библиотек передачи сообщений в 1993 г. привели к разработке стандарта MPI (Message Passing Interface), являющего в настоящее время наиболее общим подходом к созданию параллельных программ для вычислительной техники с распределенной памятью [170].

Для передачи данных другим процессорным элементам и получения данных от них процессы обращаются к функциям MPI, определяя тип, количество данных и идентификатор процессора отправителя (получателя).

Расчеты производились на кластерной системе ТГУ СКИФ Cyberia на сетках $240 \times 240 \times 240$ и $360 \times 360 \times 360$ при использовании до 144 процессорных элементов. Результаты вычислительного эксперимента показали наличие хорошего ускорения при решении задач данного класса.

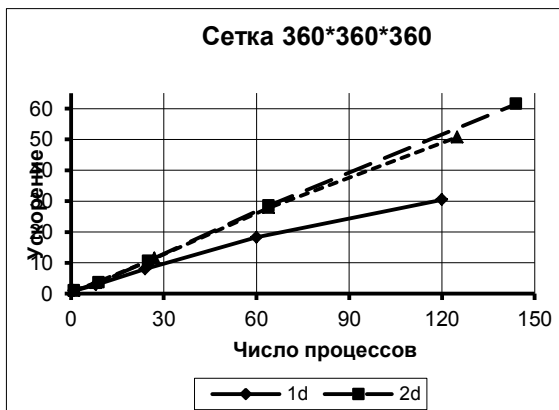


Рисунок 3.10 – График ускорения при использовании «динамических» массивов

На рис. 3.10 представлен график ускорения параллельной программы для различных способов декомпозиции. Здесь наилучшие показатели демонстрирует 2D-декомпозиция, причем имеет место

прирост ускорения. Незначительно ей уступает 3D-декомпозиция, проблемы которой в масштабируемости параллельной программы связаны, главным образом, с большими, чем в 1D- и 2D-случаях, затратами на выборку, обработку и пересылку данных из оперативной памяти.

3.3.2 Распараллеливание итерационных методов решения СЛАУ и анализ эффективности полученных реализаций

а) Параллельная реализация метода Зейделя

Использование последних рассчитанных значений в методе Гаусса–Зейделя увеличивает скорость сходимости, но ограничивает параллелизм алгоритма и требует синхронизации параллельных вычислений. На рис. 3.11 показаны связи, наложенные на узлы сетки в методе Гаусса–Зейделя в проекции на плоскость XOY для случая 1D-декомпозиции. Получается, что первый процессорный элемент ПЭ1 будет простаивать, пока не получит необходимые ему значения от нулевого, а последний процессорный элемент будет дожидаться, пока все предыдущие не вычислят значения неизвестных из первого столбца. Та же неравномерность загрузки проявится и в конце итерации, когда нулевой процессорный элемент раньше остальных закончит вычислительную работу. Описанный процесс носит название волновой обработки данных [171].

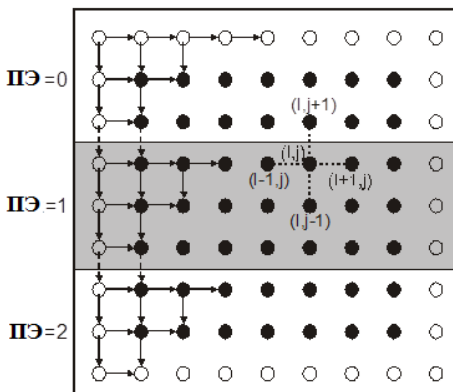


Рисунок 3.11 – Связи между узлами сетки в методе Гаусса–Зейделя

Альтернативным подходом при расчете следующей итерации является ситуация, когда каждый процесс в качестве приграничного значения $(\Phi_{i,j,k})^{m+1}$ с соседнего процессорного элемента использует переданное ему значение $(\Phi_{i,j,k})^m$ с предыдущей итерации, а не дожидается, когда будут присланы последние рассчитанные значения. Такой подход называют асинхронным [172]. Он часто бывает эффективен, но при его использовании не представляется возможным проведение анализа сходимости численного метода. С другой стороны, если отвлечься от упорядоченного обхода узлов и выбрать какой-либо другой способ обхода, то также будет реализовываться метод Зейделя [172,173].

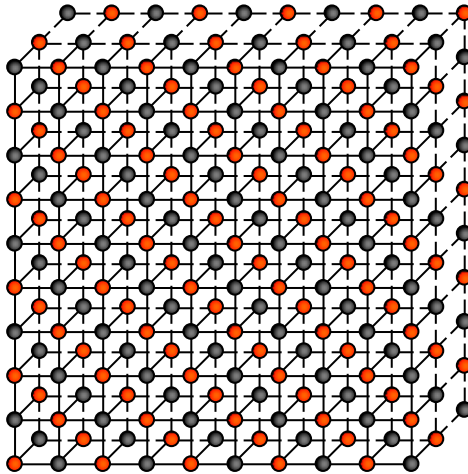


Рисунок 3.12 – Красно-черное упорядочивание

Перспективным в параллельных вычислениях стал способ обхода узлов, который носит название красно-черное упорядочивание [172,173]. Он предполагает разделение всех узлов на два вида – красные и черные в шахматном порядке (рис. 3.12). Такой способ разделения обусловлен выбором используемого конечно-

разностного шаблона, в соответствии с которым для расчета в красных узлах нужны значения в черных узлах и наоборот. Также этот вид упорядочивания дает наиболее сильные результаты сходимости [173]. На идейном уровне красно-черное упорядочивание обеспечивает перевод рекуррентных формул метода Зейделя в двухшаговое использование явных формул метода Якоби.

Важно, что такая реализация алгоритма на многопроцессорной вычислительной системе целиком сохраняет свойство последовательного алгоритма и очень хорошо масштабируется на любое разумное количество вычислительных узлов.

б) *Параллельная реализация методов CG и BiCGStab*

Эти методы не требуют никаких других операций, кроме матрично-векторного произведения, вычисления скалярных произведений и сложения векторов. Все эти операции позволяют эффективно применять параллельные вычисления на компьютере с распределенной памятью.

Далее разберем отдельно каждую матрично-векторную операцию, которая используется в изложенных выше методах. Первая операция – это матрично-векторное произведение $y = Ax$. Известно, что в общем случае при умножении матрицы на вектор возможны два способа распределения данных по процессорным элементам. В первом случае каждому процессорному элементу назначается определенное количество строк матрицы A и целиком вектор x (рис. 3.13, слева). Каждый процессорный элемент реализует умножение распределенных ему строк матрицы A на вектор x (число вычислительных узлов меньше или равно числу строк). Получаем абсолютно не связанные подзадачи, однако предложенный алгоритм не лишен и недостатков. Дело в том, что компоненты результирующего вектора y оказываются разбросанными по всем процессорным элементам и для старта следующей итерации необходимо собрать вектор y на каждом процессорном элементе.

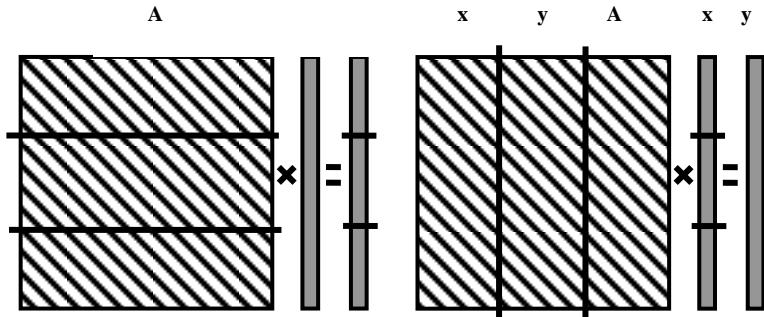


Рисунок 3.13 – Строчное и столбцовое распределение данных по вычислительным узлам

Другой вариант – каждому процессорному элементу распределяется определенное количество столбцов матрицы A , тогда отпадает необходимость хранить на каждом процессорном элементе целиком вектор x , и он распределяется по всем вычислительным узлам (схема распределения данных представлена на рис. 3.13, справа). Тогда в процессе вычислений результирующий вектор y оказывается разобраннным на составные части (слагаемые), а каждая часть (слагаемое) находится на отдельном процессорном элементе. То есть опять потребуются пересылки данных для того, чтобы собрать результирующий вектор y и разослать каждому процессорному элементу часть вектора y , необходимую для начала следующей итерации.

Для случая системы с ленточной матрицей более эффективным будет способ столбцового распределения данных по процессорным элементам, так как слагаемые, из которых складываются компоненты результирующего вектора y , будут отличны от нуля лишь на одном процессорном элементе.

Следующие две операции – это вычисление скалярного произведения и векторная операция $saxru$ (операция сложения двух векторов). При сложении векторов каждый процессорный элемент выполняет действия над распределенными ему компонентами векторов, эта операция не требует обменов данными, если нет необходимости в последующем использовании вектора целиком.

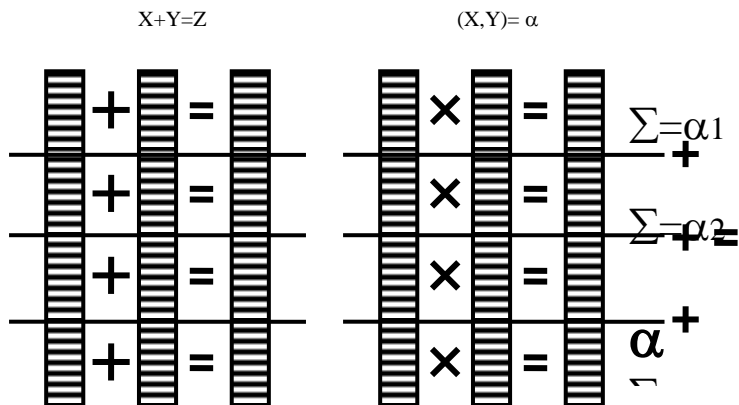


Рисунок 3.14 – Схема операций *saхru* и скалярного произведения

Вычисление скалярного произведения – принципиально другая операция, ее результатом является не вектор, а число, которое впоследствии должно быть разослано на все вычислительные узлы. При вычислении скалярного произведения первый этап – покомпонентное умножение векторов, в результате которого получается вектор, – происходит независимо на каждом процессорном элементе подобно сложению векторов. Затем необходимо просуммировать все компоненты полученного вектора (рис. 3.14). Сначала на каждом процессорном элементе выполняется суммирование принадлежащих ему компонент полученного вектора, затем результаты сложения собираются и суммируются на одном из вычислительных узлов, полученный результат рассылается остальным вычислительным узлам.

в) *Параллельная реализация явного метода Булеева*

Решение сеточных уравнений методом Булеева при 1D-, 2D- и 3D-декомпозиции расчетной области оказывается невозможным, потому как использование этого метода напрямую подразумевает многократный переход от одного узла расчетной сетки к другому через всю расчетную область. В работе [174] предложен способ решения этой проблемы. Идея преодоления этой сложности состоит в следующем: прямой и обратный ход метода Булеева организуется не по всей области, а по подобластям, получившимся в результате

декомпозиции расчетной области, при этом в качестве граничных условий используются по аналогии с асинхронным методом Зейделя значения с последней итерации. В [174] показано, что при использовании данного подхода количество итераций возрастает незначительно (10 %).

г) *Результаты тестирования методов решения СЛАУ*

Сравнение различных методов решения системы линейных алгебраических уравнений осуществлялось на примере численного решения уравнения Пуассона в единичном кубе:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial P}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial P}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial P}{\partial z}\right)=f, \quad (3.50)$$

с граничными условиями Дирихле на границе $x=1$ и условиями Неймана на остальных границах:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=0} &= 0; & \left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{y=0} &= 0; & \left.\frac{\partial P}{\partial z}\right|_{z=0} &= 0; \\ P|_{x=1} &= 0; & \left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{y=1} &= 0; & \left.\frac{\partial P}{\partial z}\right|_{z=1} &= 0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Шаг сетки выбирался из условия, чтобы система линейных уравнений имела $120 \times 120 \times 120$ неизвестных. Использовалось нулевое начальное приближение.

Выбор данной задачи обусловлен тем, что при вычислении поправок давления при расчете течения жидкости в канале ставятся аналогичные граничные условия и является важным, чтобы выбранный метод справлялся с задачами, в которых на границах заданы условия Неймана.

Функции D и f определялись двумя разными способами и служили для исследования свойств рассматриваемых методов. В первом случае предполагалось заданное аналитическое решение $P(x)=1-x^2$, схожее с распределением давления для течения в начальном участке канала и удовлетворяющее граничным условиям ($D=-1$, $f=-2$). Во втором оценивалась пригодность алго-

ритма для решения плохообусловленных систем ($D=1000$, если $0,1 < x, y, z < 0,9$, иначе $D = 1, F = 1$).

Для многопроцессорной вычислительной системы с распределенной памятью были реализованы все описанные выше алгоритмы: метод Зейделя с красно-черным упорядочиванием, явный метод Булеева, метод сопряженных градиентов (CG), метод сопряженных градиентов, предобусловленный методом Зейделя, стабилизирующий метод бисопряженных градиентов (BiCGStab), метод бисопряженных градиентов с предобуславливанием методом Булеева или методом Зейделя (BiCGStabP).

Результаты сравнения показали, что для задач большого размера только метод Зейделя с красно-черным упорядочиванием при распараллеливании целиком повторяет процесс сходимости последовательного алгоритма, что выражается в сохранении количества итераций, требующихся для сходимости метода вне зависимости от числа использованных процессов и способа декомпозиции. Важно отметить, что рассматриваемая реализация алгоритма очень хорошо масштабируется на любое количество вычислительных узлов.

Параллельная реализация методов сопряженных и бисопряженных градиентов теоретически также не нарушает процесс сходимости последовательного алгоритма. Но на практике обнаруживается, что количество итераций случайным образом меняется при различных способах декомпозиции. Численные эксперименты показали, что это является следствием некоммутативности в случае машинной арифметики вычисления суммы большого количества слагаемых (сбор частичных сумм скалярного произведения), что в дальнейшем приводит к изменению хода итерационного процесса. Необходимо отметить, что сам итерационный процесс в конце концов сходится, при этом лишь незначительно меняется получение последовательности приближений к решению.

Параллельный алгоритм метода Булеева для поставленной задачи работает корректно в том случае, если не используется разбиение области по оси Ox и тем самым допускает применение лишь 1D- и 2D-декомпозиции.

В табл. 3.3 и 3.4 приведено время в секундах (для 2D-декомпозиции и разностной сетки $120 \times 120 \times 120$), требующееся для сходимости рассматриваемых методов к решению с заданной точно-

стью (вычисления выполнялись с точностью 10^{-5} , контроль сходимости метода выполнялся по норме ошибки и невязки), и показано, что методы сопряженных направлений на два порядка более эффективны при решении предложенных для тестирования задач.

Таблица 3.3 – Время счета на разном количестве процессорных элементов для рассматриваемых методов (задача 1) при 2D-декомпозиции

Метод / Число процессов	1	9	25	64	144	225
Метод Зейделя	7275	2050	760	246	104	72
Метод Булеева	7618	1478	890	342	168	146
Метод CG	29	8,1	2,4	0,7	0,23	0,2
Метод BiCGStab	56	15,8	5	1,76	0,69	0,43

Таблица 3.3 – Время счета на разном количестве процессорных элементов для рассматриваемых методов (задача 2) при 2D-декомпозиции

Метод / Число процессов	1	9	25	64	144	225
Метод Зейделя	51756	15153	6054	2134	633	630
Метод Булеева	60000	12393	5251	2539	1686	1567
Метод CG	483	136	41	12	3,9	3,6
Метод CG с предобуславливанием методом Зейделя	212	59	21	5,3	1,74	1,35
Метод BiCGStab с предобуславливанием методом Булева	152	47	20	–	–	–
Метод BiCGStab с предобуславливанием методом Зейделя	125	41	14,4	3,5	1,38	1,3

Вторая тестовая задача является более сложной с точки зрения числа обусловленности, полученной после дискретизации системы линейных алгебраических уравнений, что подтверждается большими временными затратами при ее решении вследствие увеличения количества итераций, требующихся для сходимости любого из рассматриваемых итерационных методов. Также следует отметить, что для первой тестовой задачи использование предобуславливателей оказалось неэффективным и привело к увеличению времени вычислений на 30 %. Это подтверждает мнение автора [166] о том, что предобуславливание необходимо использовать в случае решения

плохообусловленных систем. Дальнейший анализ свойств представленных алгоритмов и эффективности предобуславливания проводится на примере второй тестовой задачи.

Метод Зейделя с красно-черным упорядочиванием и асинхронный метод Булеева сходятся к решению более равномерно, но требуют значительного количества итераций: 306 117 – метод Булеева и 42 1458 – метод Зейделя. Метод сопряженных градиентов также сходится равномерно и монотонно, но за меньшее количество итераций – 3 683. Сходимость предобусловленных методов не является монотонной, но количество итераций сокращается на несколько порядков. Так, предобусловленные методом Зейделя методы CG и BiCGStab сходятся за 217 и 100 итераций соответственно. Метод BiCGStab с предобуславливанием по Булееву сходится за 297 итераций при расчете на одном вычислительном узле. Также необходимо отметить, что количество итераций для сходимости методов Булеева увеличивается на 35 % при увеличении количества вычислительных узлов до 225.

На рис. 3.15 представлено ускорение параллельных программ для наиболее эффективных из рассматриваемых методов. Максимальное ускорение показывает метод сопряженных градиентов с предобуславливанием методом Зейделя (такое же ускорение получено при использовании метода сопряженных градиентов без предобуславливания), чуть хуже показатели у метода бисопряженных градиентов с предобуславливанием методом Зейделя. Низкое ускорение методов Булеева и бисопряженных градиентов с предобуславливанием Булеева объясняется значительным увеличением количества итераций, требующихся для сходимости этих методов при увеличении количества используемых процессов. Эффективность метода Зейделя при использовании до 144 вычислительных узлов остается на уровне 56 %, что является приемлемым показателем и позволяет использовать метод для решения задач данного класса.

Таким образом, для явных разностных методов решения уравнения переноса возможно применение одномерной, двумерной и трехмерной декомпозиции, однако результаты тестирования программ показали, что 3D-декомпозиция не дает выигрыша во времени по сравнению с 2D-декомпозицией, по крайней мере, для количества процессорных элементов, не превышающего 250, при этом 3D-де-

композиция отличается более трудоемкой программной реализацией, а использование 2D-декомпозиции является достаточным для масштабирования данной задачи при рассматриваемом числе вычислительных узлов.

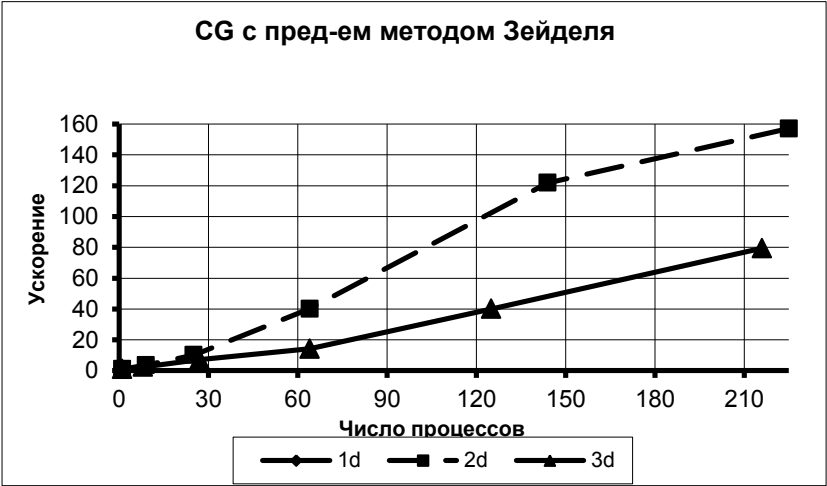
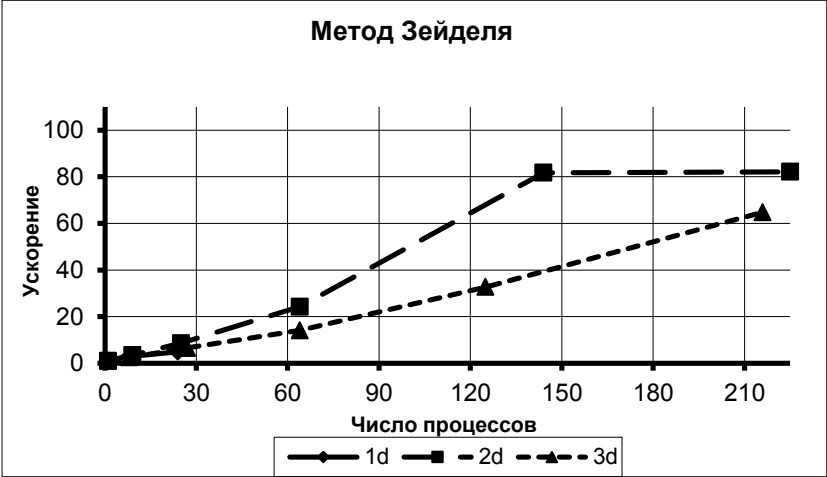


Рисунок 3.15 (начало)

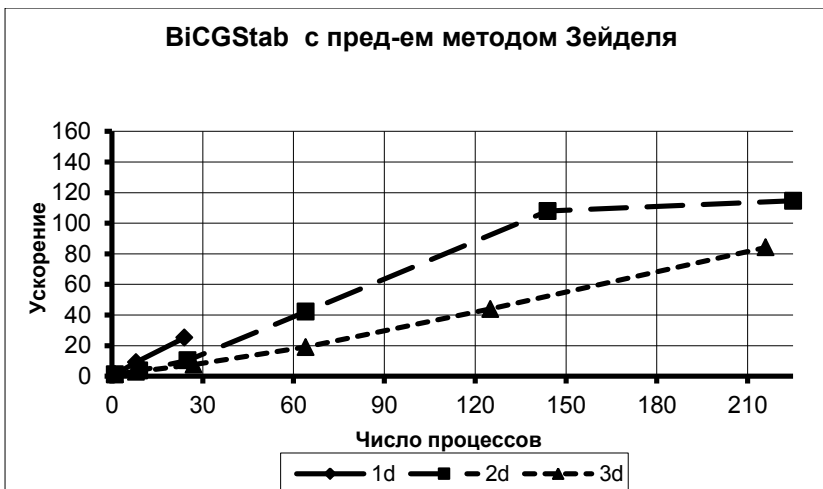


Рисунок 3.15 (окончание) – Ускорение параллельной программы для описанных методов

На основе полученных результатов для рассмотренных в работе методов решения систем линейных алгебраических уравнений для поправки давления можно сделать вывод, что более эффективными с точки зрения ускорения и скорости сходимости являются методы сопряженных направлений. При этом выбор используемого метода должен определяться поставленной задачей. Так, наиболее предпочтительным вариантом для рассматриваемой во второй главе задачи является метод сопряженных градиентов с предобуславливанием методом Зейделя.

Необходимо отметить, что метод Зейделя с красно-черным упорядочиванием также может использоваться для решения системы уравнений для поправок давления. При этом данный метод является наиболее надежным с точки зрения влияния количества используемых процессорных элементов и сложности рассматриваемой задачи на результаты расчетов.

Применение в расчетах 2D-декомпозиции дает 135 % эффективности при использовании 25 процессорных элементов. При дальнейшем увеличении количества используемых процессорных элементов до 100 при выбранных размерах сетки, получено характерное для задач данного класса значение эффективности около 50 %.

3.4 Результаты применения вихреразрешающей модели турбулентности

3.4.1 Турбулентное течение в прямолинейном канале

Оценка корректности работы подсеточной модели и предложенных схем аппроксимации конвективных слагаемых была проведена на задаче исследования турбулентного течения в плоском канале при низких числах Рейнольдса.

Течение в канале является хорошим тестовым примером для апробации различных моделей турбулентного течения, результаты расчета которого показывают, насколько хорошо построенная модель воспроизводит процессы, происходящие в пограничном слое. Задача особенно интересна тем, что в рассматриваемом случае генерация энергии турбулентности осуществляется за счет взаимодействия потока с ограничивающей поверхностью.

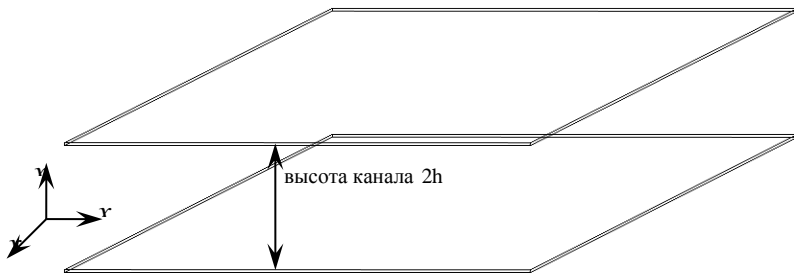


Рисунок 3.16 – Схематическое представление канала

Геометрия расчетной области представлена на рис. 3.16. Граничные условия задавались следующим образом: по направлению потока – условия периодичности с сохранением расхода, на открытых боковых поверхностях – условия скольжения, на верхней и нижней образующих канала – условия прилипания. Использовалась динамическая модель с осреднением вдоль однородных направлений Ox_1 , Ox_2 . Для задания начальных условий выбраны аналитические выражения, предложенные в работе [56] и успешно использованные в работе [135] для трех компонент скорости ($Re_\tau = u_* h / \nu = 180$; u_* – динамическая скорость; h – полуширина канала):

$$\begin{aligned}
 u_1(x_1, x_2, x_3) / U_{in} &= C \left(1 - (x_3 / h)^8 \right) + \varepsilon 2\pi \sin(\pi x_3 / h) \cos(x_1 / h) \sin(x_2 / h); \\
 u_2(x_1, x_2, x_3) / U_{in} &= -\varepsilon \pi \sin(x_1 / h) \sin(\pi x_3 / h) \cos(x_2 / h); \\
 u_3(x_1, x_2, x_3) / U_{in} &= -\varepsilon \left(1 + \cos(\pi x_3 / h) \right) \sin(x_1 / h) \sin(x_2 / h).
 \end{aligned}
 \tag{3.52}$$

Здесь $C = 7,764 \text{Re}_\tau^{1/7} \cdot u_* / U_{in}$ и $\varepsilon = 0,1C$. Эти начальные условия удовлетворяют граничным условиям и по своей сути являются возмущением, наложенным на среднее двумерное течение, для задания начального уровня турбулентности в потоке. Условия проведения расчетов выбраны в соответствии с работой [135], размеры канала $4\pi h, 2\pi h, 2h$, расчеты проводились на равномерной сетке $96 \times 80 \times 64$.

Результаты сравнения с прямым численным моделированием [175] и экспериментальными данными [176] показывают, что использование консервативной центрально-разностной схемы второго или четвертого порядка точности позволяет довольно точно описывать профиль продольной компоненты скорости, при этом результаты хорошо согласуются с данными прямого численного моделирования. В то же время использование противопотоковой схемы QUICK дает результат, наиболее близкий к экспериментальным данным. Применение противопотоковой схемы MLU приводит к некоторому завышению значений продольной компоненты скорости (рис. 3.17).

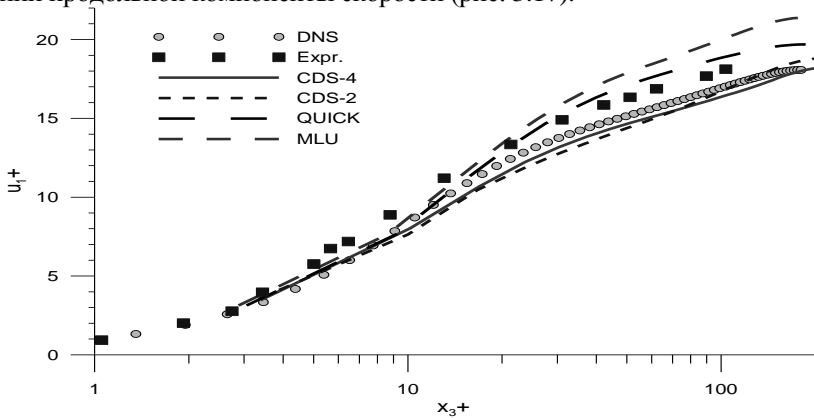


Рисунок 3.17 – Профиль средней скорости в продольном направлении

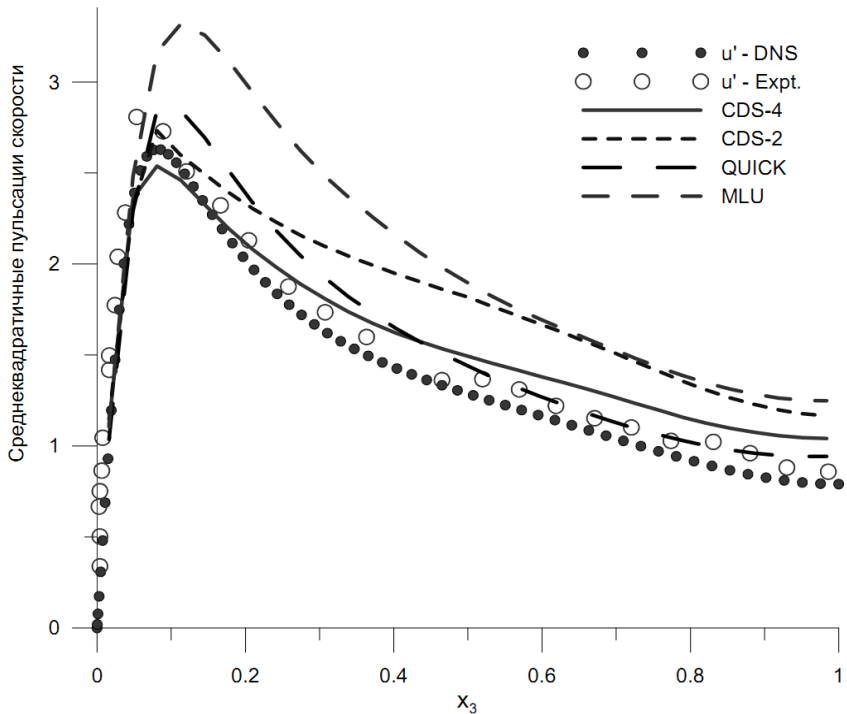


Рисунок 3.18 – Флуктуации продольной компоненты скорости

На рис. 3.18 представлены среднеквадратичные флуктуации продольной компоненты скорости для расчетов с применением четырех схем аппроксимации конвективных слагаемых: центрально-разностной второго порядка (CDS-2), центрально-разностной четвертого порядка (CDS-4), направленной схемы QUICK и противопотоковой схемы MLU. Из рис. 3.18 видно, что результаты, полученные при использовании центрально-разностной схемы второго или четвертого порядка точности, хорошо согласуются с результатами прямого численного моделирования [175] и экспериментальными данными [176] в области вблизи стенки и позволяют довольно точно находить положение наблюдаемого максимума пульсаций скорости. Также необходимо отметить, что в ядре потока более точные результаты дает схема QUICK, а завышение уровня флуктуаций в ядре по-

тока при использовании центрально-разностной схемы, по-видимому, вызвано возникающими осцилляциями в совокупности с уменьшением динамического коэффициента Смагоринского в этой области почти до нуля.

3.4.2 Обтекание цилиндра квадратного поперечного сечения

Рассмотрим турбулентный поток вокруг цилиндра квадратного сечения, который расположен в канале (рис. 3.19). Выбор области течения и значения числа Рейнольдса $Re = U_{in}D/\nu$ соответствуют эксперименту [177]. Хотя представленный случай имеет довольно простую геометрию, за цилиндром образуется неустойчивый след. В расчетах использовалась следующая сетка: $Nx_1 \times Nx_2 \times Nx_3 = 132 \times 122 \times 22$.

Движение жидкости поддерживалось за счет задания постоянной скорости на входной границе, направленной вдоль оси Ox_1 . В качестве начальных данных использовались постоянные значения скорости $\bar{u}_1 = U_{in} = 0,55$ м/с, $\bar{u}_2 = \bar{u}_3 = 0$, температура цилиндра $T_c = 303$ К, температура потока на входе $T_{in} = 293$ К. Расчеты (и осреднение величин) проводились в течение двенадцати периодов отрыва вихря после времени инициализации, равного $50D/U_{in}$.

Эксперимент с обтеканием цилиндра квадратного сечения хорошо описан, имеются данные измерений, представленные в виде таблиц. Этот эксперимент часто используется для апробации различных подходов моделирования турбулентности. Набегающий ламинарный поток рассеивается на наветренной стороне цилиндра, а с боковых поверхностей отрываются турбулентные вихри. Экспериментально установленная частота отрыва вихрей f соответствует значению безразмерного числа Струхала $Sh = fD/U_{in} = 0,13$. Такое же значение частоты отрыва вихрей получено численно в результате расчетов.

Расчеты проводились с использованием двух подсеточных моделей: Смагоринского с постоянным коэффициентом $C_s = 0,13$ и ди-

намической с осреднением по одному однородному направлению Ox_3 . В расчетах применялись две схемы для аппроксимации конвективных слагаемых: противопотоковая схема MLU [125] и схема QUICK [126].

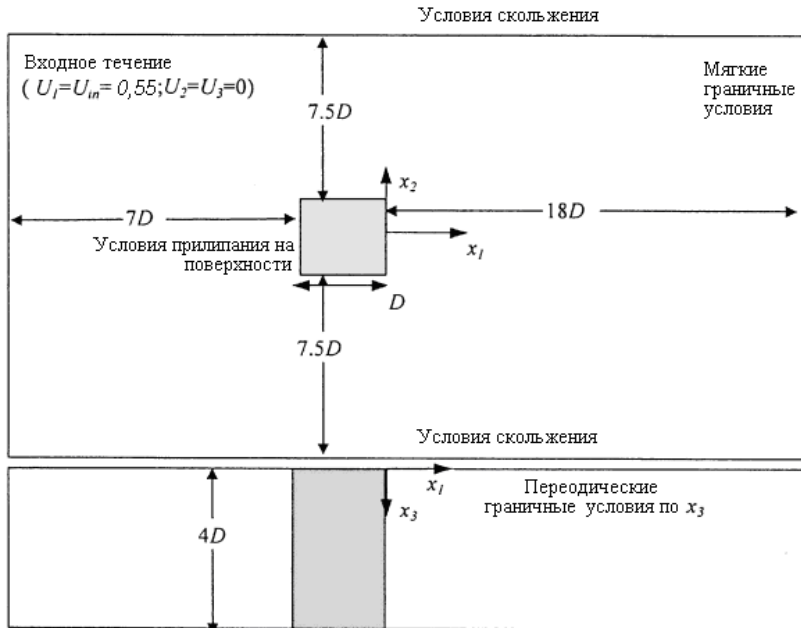


Рисунок 3.19 – Расчетная область

Вычислительный эксперимент показал наличие хорошего уровня согласования расчетов с экспериментальными данными [177]. Профиль компоненты скорости u_1 , осредненной по пространству и времени, хорошо накладывается на данные измерений. На рис. 3.20 представлены результаты расчетов изменения осредненной по времени продольной скорости потока вдоль оси, ориентированной по потоку и проходящей через середину поперечной плоскости расчетной области. Также на рис. 3.20 приведены результаты применения различных подсеточных моделей для описания мелкомасштабной

турбулентности, взятые из [119] (в этой работе для аппроксимации конвективных слагаемых использовалась противопотоковая схема третьего порядка точности).

Сравнение результатов (см. рис. 3.20) показывает, что схема MLU Ван Лира вносит свой вклад в подсеточное моделирование и позволяет достичь довольно точного согласования результатов численного эксперимента с измерениями [177] для средних характеристик потока при использовании замыкания Смагоринского с постоянным коэффициентом. Однако лучших результатов удалось достичь при использовании схемы QUICK для аппроксимации конвективных слагаемых в сочетании с динамическим замыканием для подсеточного моделирования (с осреднением вдоль однородного направления Ox_3).

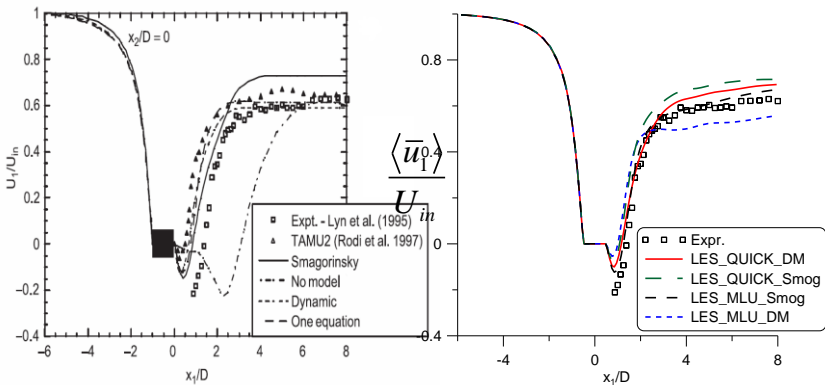


Рисунок 3.20 – Сравнение профиля средней скорости u_1 при использовании различных подсеточных моделей [119] (слева) и результаты моделирования при использовании схем аппроксимации конвективных слагаемых и подсеточных моделей, рассматриваемых в данной работе (справа)

На рис. 3.21 и 3.22 представлены профили осредненных по времени нормальных турбулентных напряжений вниз по потоку за цилиндром. Из рисунков видно, что получено достаточно хорошее соответствие с данными эксперимента [177] для относительных пульсаций компонент скорости u_1, u_2 . Отсутствует характерное для расчетов [119] по модели Смагоринского серьезное завышение измен-

чивости $\langle \overline{u_1^2} \rangle / U_{in}^2$ и занижение изменчивости $\langle \overline{u_2^2} \rangle / U_{in}^2$ вдоль оси Ox_1 . Результаты моделирования показывают, что применение динамического замыкания для подсеточного моделирования оказывает положительное влияние на качество решения при использовании схемы QUICK и несколько ухудшает результат (рис. 3.22) при использовании схемы MLU для аппроксимации конвективных слагаемых.

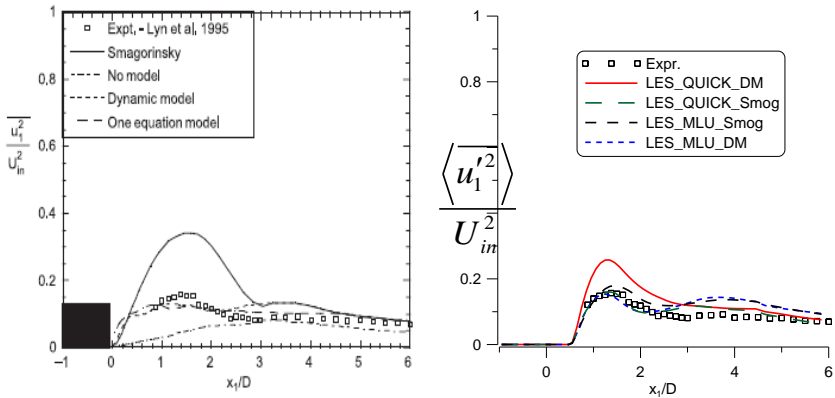


Рисунок 3.21 – Турбулентные напряжения для пульсаций скорости u_1 ; справа – результат, полученный в данной работе

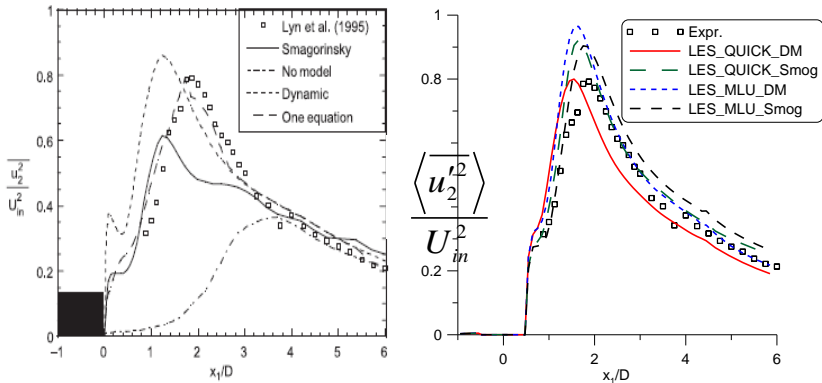


Рисунок 3.22 – Турбулентные напряжения для пульсаций скорости u_2 ; справа – результат, полученный в данной работе

На рис. 3.23 представлена мгновенная картина распределения температуры вблизи нагретого цилиндра, иллюстрирующая, как тепло распространяется за счет турбулентного движения. Видно, что температура в оторвавшемся с поверхности цилиндра вихре выше, чем температура в его окрестности.

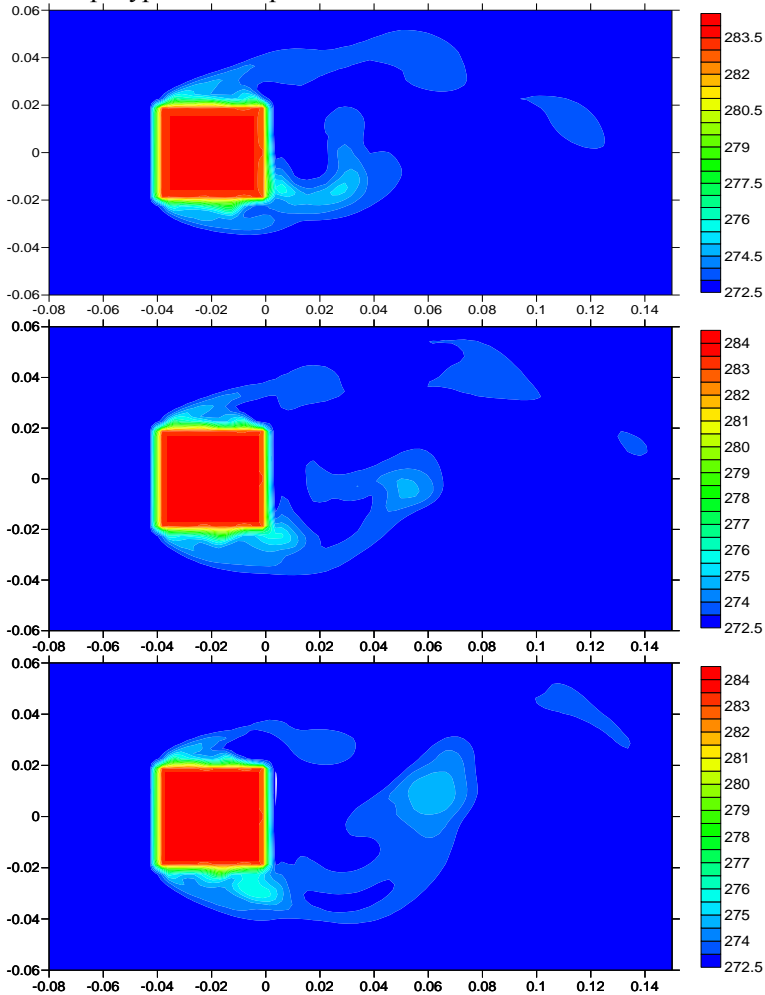


Рисунок 3.23 – Распределение температуры в моменты времени $t_1 < t_2 < t_3$, где $t_2 = t_1 + 0,2T$, $t_3 = t_1 + 0,4T$; T – период отрыва вихря

На рис. 3.24 представлено векторное поле скорости на фоне поля давления. Показано, что на наветренной стороне цилиндра образуется область повышенного давления, а в области завихрения давление наоборот ниже, чем в окрестности образовавшегося или формирующегося вихря.

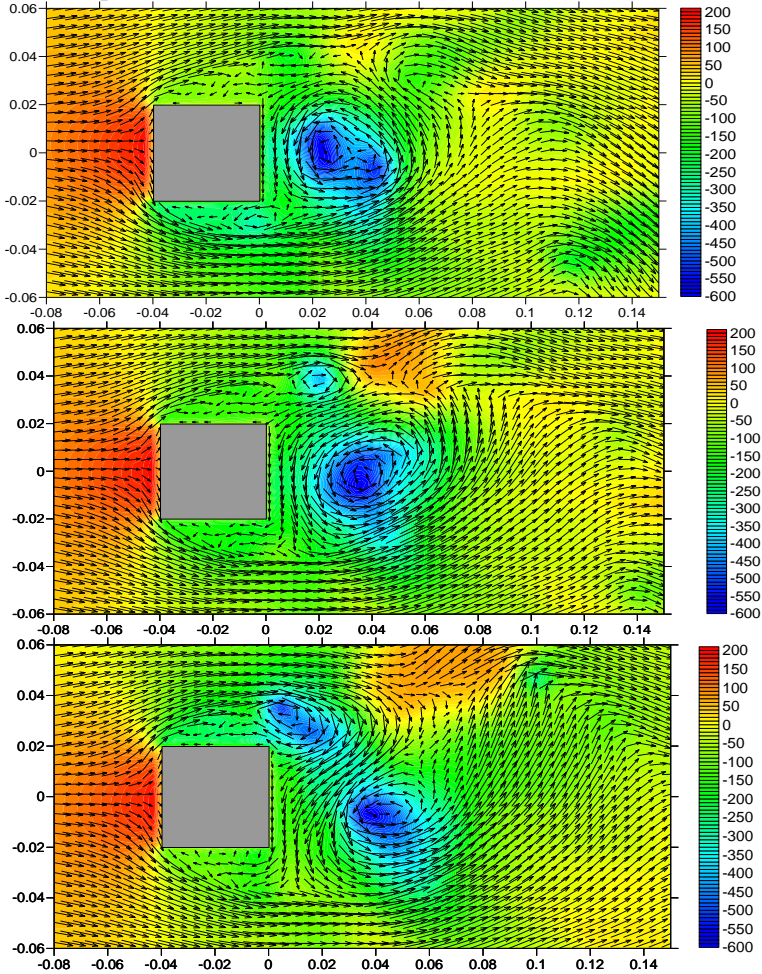


Рисунок 3.24 – Векторное поле скорости и карта давления в моменты времени $t_1 < t_2 < t_3$, где $t_2 = t_1 + 0,2T$, $t_3 = t_1 + 0,4T$; T – период отрыва вихря

3.4.3 Исследование движения воздуха и переноса примеси в уличном каньоне

Детальное изучение характеристик потока и механизма распространения примеси в масштабе определенного уличного каньона – важная и сложная задача. Исследования такого рода актуальны для понимания микроклимата городов и полезны в планировании новых зданий или целых кварталов. Существующие эмпирические модели испытывают определенные трудности при моделировании городской застройки, так как потоки в уличных каньонах характеризуются наличием отрывных зон и участков рециркуляции.

Сформулированная выше в п. 3.1.2 вихререзрывающая модель была применена для исследования аэродинамики потока и переноса примеси, поступающей от точечного источника, в элементах городской застройки. Область исследования представлена на рис. 3.25.

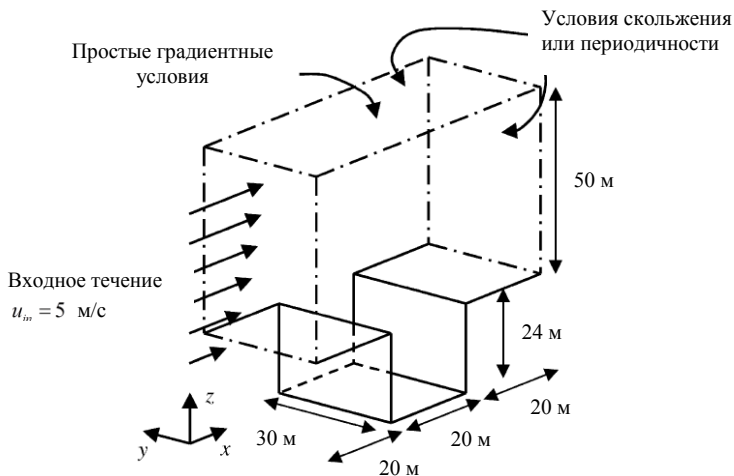


Рисунок 3.25 – Расчетная область

В поперечном основном потоку направлении использовались условия скольжения или периодичности. В обоих случаях необходимо иметь определенное количество узлов сетки, для того чтобы длина области в поперечном направлении была больше, чем размер

самого большого вихря в каньоне. Для рассматриваемого случая крупнейший вихрь ограничен шириной каньона $W = 20$ м, тогда поперечную длину каньона можно взять равной 30 м ($L/W = 1,5$) [62]. Периодические граничные условия задавались в продольном направлении с целью имитировать бесконечную серию каньонов. Расчеты проводились на сетке $182 \times 54 \times 180$. Источник поступления примеси постоянной интенсивности располагался вблизи поверхности на высоте $h_z = 0,125$ м. На рис. 3.27–3.29 представлены изолинии концентрации примеси при различных конфигурациях и условиях движения воздушных масс в уличном каньоне.

Рассматривались следующие варианты:

I. Исследование влияния расположения источника примеси:

1) $W = 20$ м; $H = 24$ м; $U_{in} = 5$ м/с. Источник примеси располагается в центре каньона в точке $x = 30$ м, $y = 15$ м, $z = 0,125$ м (рис. 3.27, а);

2) $W = 20$ м; $H = 24$ м; $U_{in} = 5$ м/с. Источник у правого края каньона в точке $x = 36$ м, $y = 15$ м, $z = 0,125$ м (рис. 3.27, б);

3) $W = 20$ м; $H = 24$ м; $U_{in} = 5$ м/с. Источник у левого края каньона в точке $x = 25$ м, $y = 15$ м, $z = 0,125$ м (рис. 3.27, в).

II. Исследование влияния скорости ветра. Источник примеси в центре каньона $x = 30$ м, $y = 15$ м, $z = 0,125$ м:

4) $W = 20$ м; $H = 24$ м; $U_{in} = 10$ м/с (рис. 3.28, а, б);

5) $W = 20$ м; $H = 24$ м; $U_{in} = 2,5$ м/с (рис. 3.28, в, д).

III. Исследование влияния геометрии каньона. Источник примеси находится в центре уличного каньона в точке $x = 30$ м, $y = 15$ м, $z = 0,125$ м:

6) $W = 20$ м; $H = 10$ м; $U_{in} = 2$ м/с (рис. 3.29, а, б, е);

7) $W = 20$ м; $H = 5$ м; $U_{in} = 2$ м/с (рис. 3.29, в, д, ф);

8) $W = 40$ м; $H = 5$ м; $U_{in} = 2$ м/с (рис. 3.29, а, б, в).

Расчеты (и осреднение величин) проводились в течение 240 с после времени инициализации, равного 200 с, значение которого определялось по аналогии с примером обтекания цилиндра как $50H / U_{in}$. Таким образом, можно полагать, что за время моделирования в городской каньон было выброшено одинаковое количество примеси для всех рассматриваемых случаев.

Моделирование движения воздуха для исследуемого случая показало, что основной поток вовлекает во вращательное движение воздушные массы, находящиеся внутри уличного каньона (см. рис. 3.26), и задает направление и интенсивность возникающего вихревого движения. Примесь, поступающая от источников, расположенных на дне каньона, переносится возникшим вращательным движением к подветренной стороне каньона и далее отчасти выветривается, попадая в основной поток, отчасти возвращается вращательным движением воздуха в область, ограниченную вертикальными стенками близкостоящих зданий.

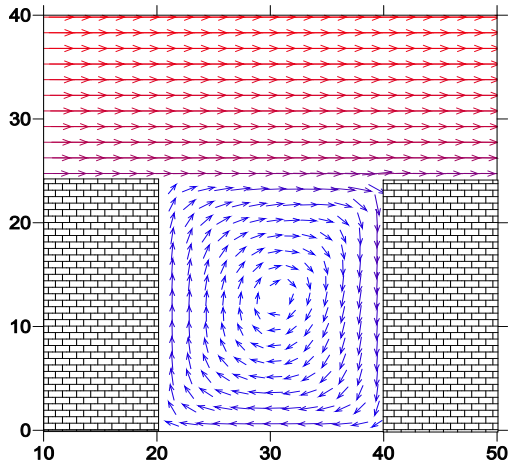


Рисунок 3.26 – Векторное поле скорости (осредненное по времени)

Скорость рециркуляционного движения потока в каньоне существенно ниже скорости основного потока, а локальные максимумы концентрации примеси наблюдаются вблизи источников и у подветренной стороны.

Результаты численных экспериментов показали, что при перемещении источника примеси к наветренной стороне в каньоне возрастают максимальные концентрации примеси. Это обусловлено увеличением расстояния, которое преодолевает примесь до выхода за пределы уличного каньона, так как с увеличением этого расстояния возрастает степень рассеяния примеси за счет турбулентной диффузии и повышается вероятность ее накопления в застойных зонах. С другой стороны, когда источник примеси располагается у подветренной стороны уличного каньона, примесь рассеивается менее интенсивно и в большей степени выносится потоком из уличного каньона (рис. 3.27, *a-c*).

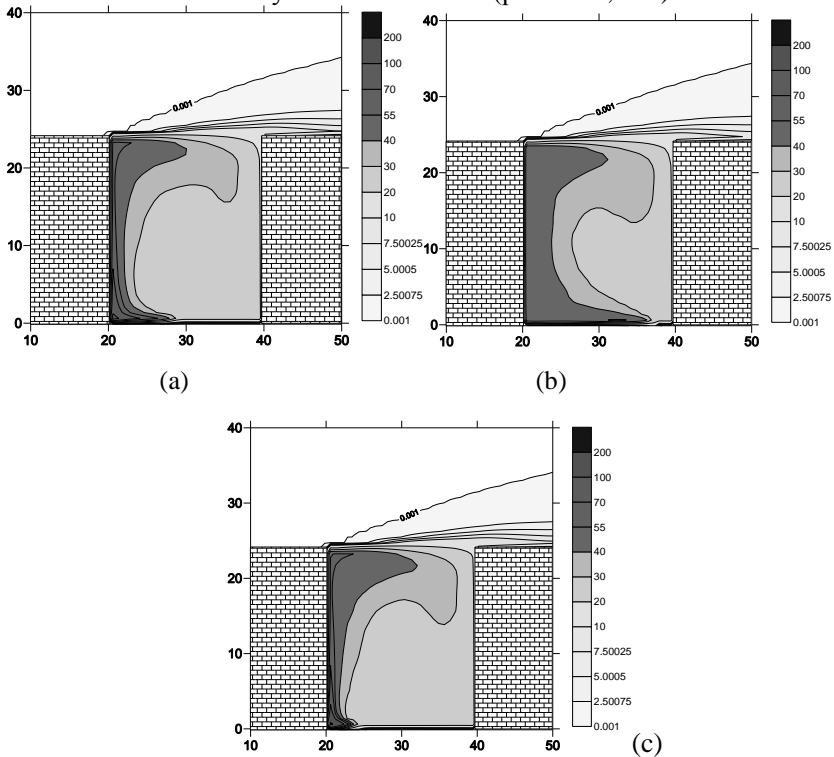


Рисунок 3. 27 – Изолинии концентрации примеси, осредненной вдоль оси Oy . $W = 20$ м; $H = 24$ м; $U_{in} = 5$ м/с; источники примеси в точках: *a* – $x = 30, y = 15, z = 0,125$; *b* – $x = 36, y = 15, z = 0,125$; *c* – $x = 25, y = 15, z = 0,125$

Исследование влияния скорости ветра над уличным каньоном показало, что увеличение скорости ветра приводит к уменьшению концентрации вредных примесей в каньоне (рис. 3.28, *a, b*).

Вычислительные эксперименты также показали, что геометрические параметры уличного каньона оказывают существенное влияние на вид течения и уровень загрязнения воздуха. Так, уменьшение высоты застройки по отношению к расстоянию между зданиями $H/W = 0,5$ (см. рис. 3.29, *a, b*) приводит к растяжению вихря вдоль уличного каньона и увеличению концентрации с подветренной стороны. Дальнейшее уменьшение высоты каньона $H/W = 0,25$ (см. рис. 3.29, *c, d*) характеризуется, как и в случае $H/W = 0,5$, смещением центра основного вихря к наветренному заданию и еще большим растяжением вихря, что приводит к уменьшению скорости вращательного движения воздушных масс у подветренной стороны каньона, и, как следствие, примесь менее интенсивно выносится из каньона и еще больше возрастают локальные значения концентрации примеси.

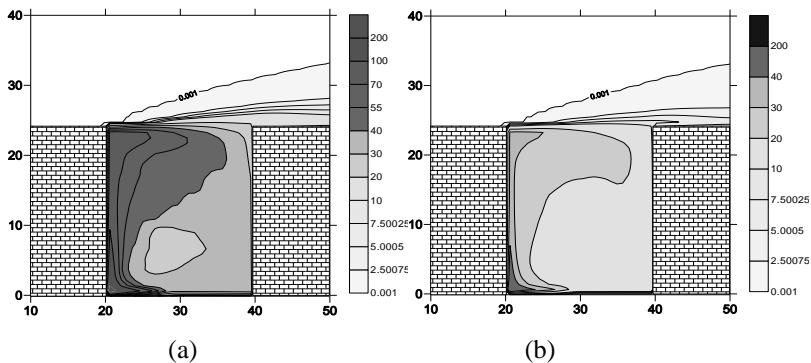


Рисунок 3. 27 – Изолинии концентрации примеси, осредненной вдоль оси Oy . $W = 20$ м; $H = 24$ м; источник примеси в точке $x = 30$ м, $y = 15$ м, $z = 0,125$ м; *a* – $U_{in} = 2,5$ м/с;

$$b - U_{in} = 10 \text{ м/с}$$

Дальнейшее увеличение расстояния между зданиями $H/W = 0,125$ приводит к образованию двух рециркуляционных зон: большой вихрь у подветренной стороны и малый у наветренной. В этом случае примесь, поступающая от источника, распо-

ложенного в центре уличного каньона, уносится в сторону подветренного здания, где она циркулирует в турбулентном вихре. Таким образом, показано, что существуют три основных режима течения в уличном каньоне [149]:

- вихрь расположен в центре уличного каньона ($H / W > 0,7$);
- вихрь растягивается и смещается к наветренной стороне каньона ($0,3 < H / W < 0,7$);
- образуются две рециркуляционные зоны: большая у подветренной стороны и малая у наветренной стороны каньона ($H / W < 0,3$).

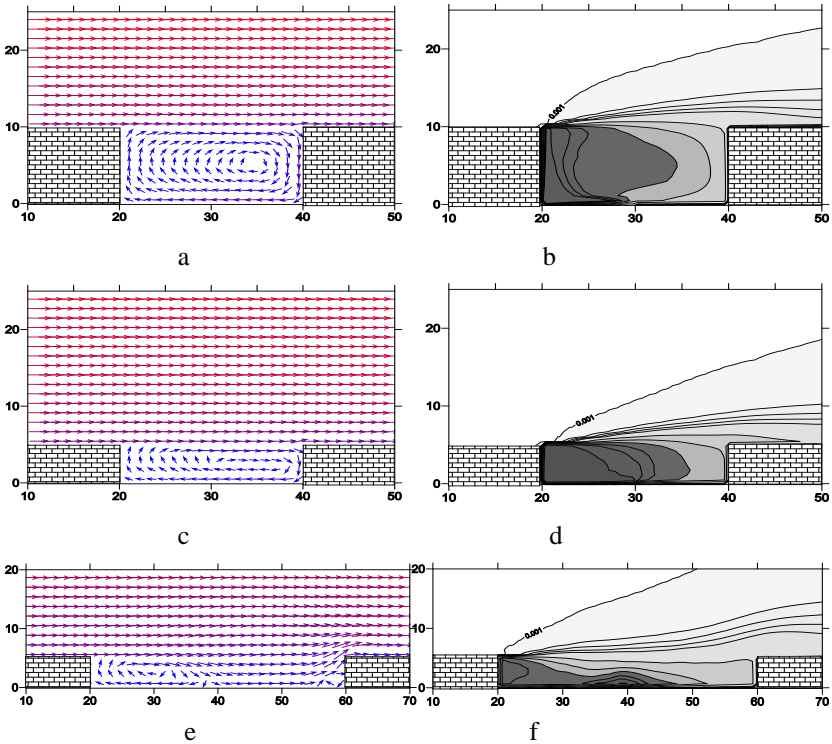


Рисунок 3.29 – Изолинии концентрации примеси, осредненной вдоль оси Oy ; векторное поле скорости, $U_m = 5$ м/с; источник примеси $x = 30$ м, $y = 15$ м, $z = 0,125$ м; $a, b - W = 20$ м; $H = 10$ м; $c, d - W = 20$ м; $H = 5$ м; $e, f - W = 40$ м; $H = 5$ м

Помимо проведения параметрических расчетов для случая $W = 20$ м, $H = 24$ м, $U_{in} = 5$ м/с (источник примеси располагается в центре каньона в точке $x = 30$ м, $y = 15$ м, $z = 0,125$ м), выполнено сравнение с экспериментальными данными из работы [178]. Результаты расчетов показали хороший уровень согласования с измеренными значениями концентрации примеси на наветренной стороне, что свидетельствует об адекватности построенной математической модели турбулентного течения и переноса примеси реальным физическим процессам (рис. 3.30).

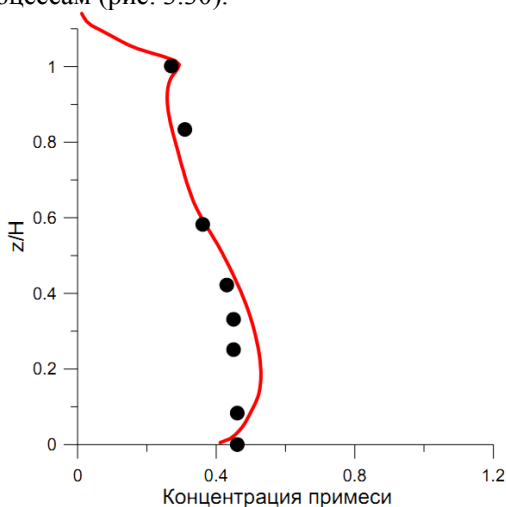


Рисунок 3.30 – Концентрация примеси на наветренной стороне. Точками обозначены экспериментальные данные [178]

3.4.4 Численное моделирование движения воздуха и переноса примеси от автотранспорта для участка городской застройки Томска

Исследование аэродинамики в уличных каньонах для условий города проводилось для случая, описанного во второй главе и в работе [179], где моделирование турбулентного течения в области городской застройки осуществлялось на основе RANS-подхода.

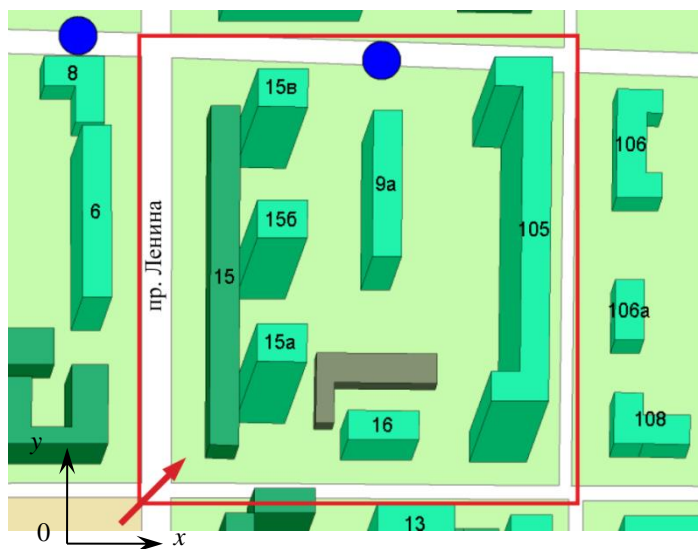


Рисунок 3.31 – Схема участка городской застройки Томска: прямоугольником выделена расчётная область, стрелкой показано направление ветра (данные из системы ДубльГИС <http://www.2gis.tomsk.ru>)

В качестве расчетной области исследования рассматривался параллелепипед размером 260×260 м и высотой 60 м. На рис. 3.31 приведена схема расчетного участка. В соответствии с данными работы [179] для проведения расчетов было выбрано юго-западное направление ветра. Исследуемая область включает здания различной конфигурации и этажности. Для расчетов использовалась равномерная сетка, которая состоит из $225 \times 231 \times 81$ ячеек по осям Ox , Oy и Oz соответственно. Источники примеси соответствуют расположению автодорог.

На входе в расчетную область скорость потока имеет профиль:

$$U_{in}(z) = U_{ref} \left(\frac{z}{z_{ref}} \right)^\alpha, \quad (3.53)$$

где $\alpha = 0,16$, $U_{ref} = 5,5$ м/с, $z_{ref} = 9,0$ м.

На рис. 3.32 представлено векторное поле осредненной по времени скорости на высоте $z = 1,5$ м. Видно, что вблизи поверхности существуют многочисленные рециркуляционные участки в углах зданий и на их торцах. Полученное осредненное по времени поле скорости хорошо согласуется с полем скорости, полученным при RANS-моделировании турбулентности и приведенным в работе [179] и во второй главе.

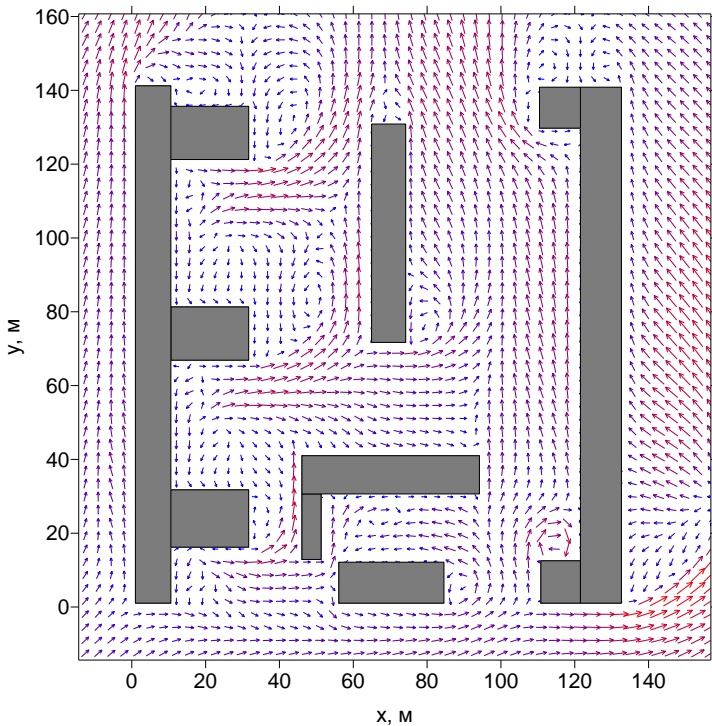


Рисунок 3.32 – Векторное поле скорости для участка Томска $z = 1,5$ м

На рис. 3.33 с двух ракурсов представлена изоповерхность концентрации примеси $\overline{\langle C \rangle} = 0,025$ для участка городской застройки. Видно, что за девятиэтажными зданиями в зонах рециркуляции, приведенных на рис. 3.32, примесь циркулирует и накапливается.

Над крышей девятиэтажного здания справа образуются небольшие возвратные течения. Об этом свидетельствует затягивание примеси с подветренной стороны здания. Необходимо отметить, что даже невысокое здание торгового центра слева защищает внутреннюю часть городской застройки от проникновения примеси и внутри городской застройки наблюдаются относительно небольшие концентрации примеси.

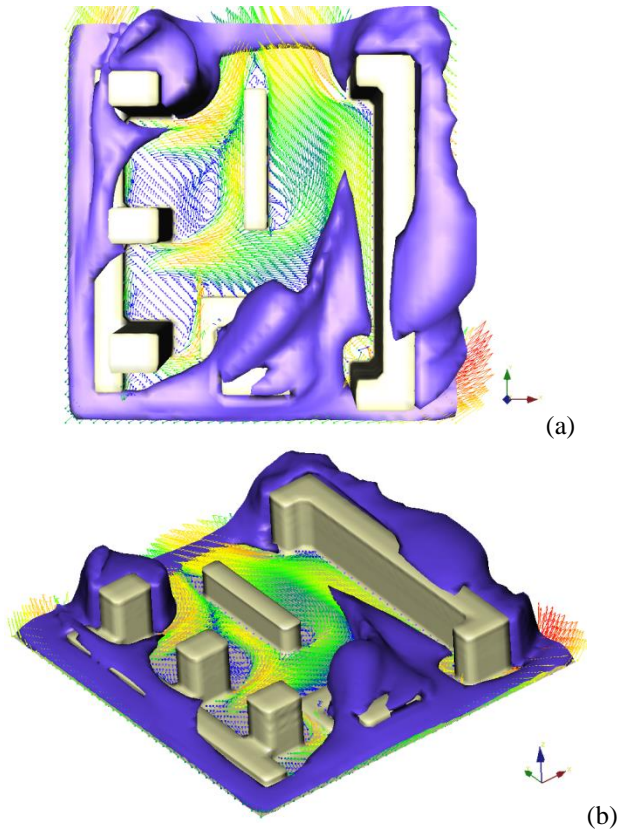


Рисунок 3.33 – Изоповерхность концентрации примеси $\overline{\langle C \rangle} = 0,025$ для участка городской застройки на фоне векторного поля осредненной по времени скорости ($z = 1,5$ м)

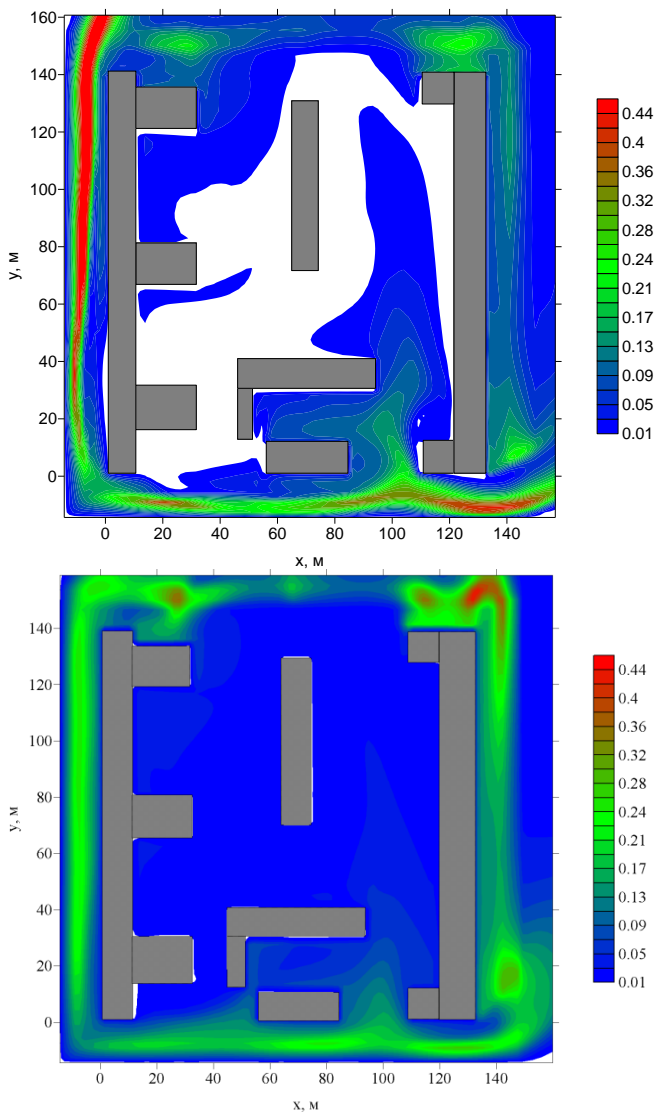


Рисунок 3.34 – Контурные линии концентрации примеси для участка городской застройки, $z = 1,5$ м: расчет по LES-модели данной работы вверху, расчеты по RANS-модели [179] внизу

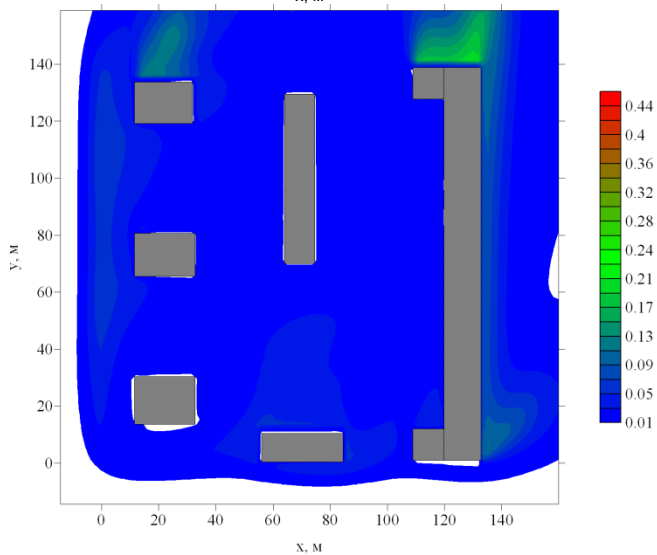
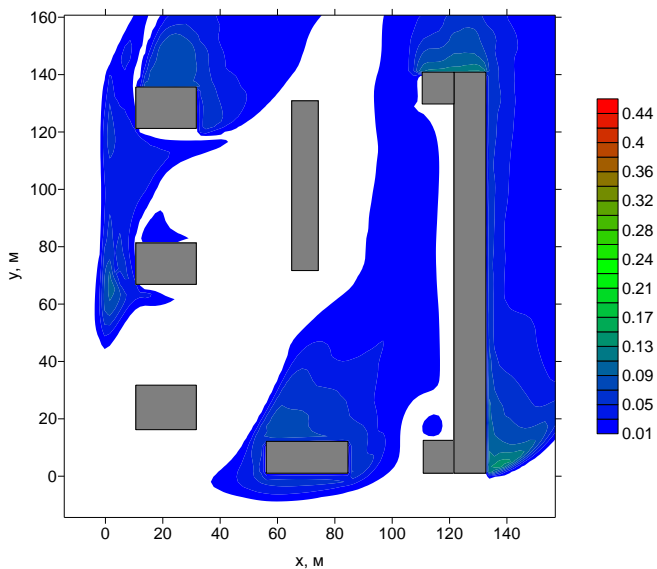


Рисунок 3.35 – Контурные линии концентрации примеси для участка городской застройки, $z = 9$ м: расчет по LES-модели данной работы сверху, расчеты по RANS-модели [179] внизу

На рис. 3.34 и 3.35 представлены контурные линии концентрации примеси на высоте $z = 1,5$ м и $z = 9$ м для расчетов по LES- и RANS-моделям. Оба метода моделирования турбулентности и переноса примеси показывают, что вблизи поверхности ($z = 1,5$ м) максимумы концентрации примеси располагаются вдоль дорог, также оба метода фиксируют наличие в приземной области локальных максимумов в районе вторичных вращательных движений воздушных масс вниз по потоку рядом с девятиэтажными зданиями. Появление этих участков с повышенной концентрацией является следствием возникающих вращательных движений воздуха в этих областях, примесь вовлекается в вихревое движение и удерживается у подветренной стороны здания.

Однако в результатах расчетов есть и отличия. Значения концентрации примеси вдоль дорог, полученные при использовании вихререзающего моделирования для описания турбулентности и массопереноса, выше, чем концентрации, полученные при использовании RANS-подхода. С другой стороны, в зонах рециркуляции наблюдается обратная тенденция. Помимо этого, из рис. 3.34 и 3.35 можно видеть, как отличаются значения концентрации примеси внутри городской застройки. Полученные данные свидетельствуют о выравнивании концентрации примеси по всей области исследования при использовании RANS-подхода для описания массопереноса. В то же время вихререзающее моделирование за счет более детального описания турбулентного течения показывает более подробную и более контрастную картину распределения концентрации примеси.

Распределение концентрации примеси на различных высотах (рис. 3.34 и 3.35) и структура изоповерхности концентрации примеси $\overline{\langle C \rangle} = 0,025$ (рис. 3.33) свидетельствуют, что наряду с интенсивным вращательным движением в горизонтальной плоскости присутствует интенсивное перемешивание в вертикальном направлении.

Заключение

Для исследования аэродинамики и переноса примеси в городской застройке разработаны нестационарные пространственные микро-масштабные модели, опирающиеся как на использование осредненных по Рейнольдсу уравнений гидродинамики и дифференциальных моделей турбулентности с учетом влияния городской растительности и движущегося автотранспорта (RANS-подход), так и на вихреразрешающее моделирование турбулентности (LES-подход).

Численная реализация предложенной RANS-микромасштабной модели осуществляется на основе метода конечного объема, неявных монотонизированных разностных схем первого порядка аппроксимации по времени и до второго по координатам. Для численного согласования полей скорости и давления применяется процедура SIMPLE. Сеточные уравнения решаются итерационно с помощью явного метода Н.И. Булеева. Тестирование математической модели и численного метода решения проведены на экспериментальных и расчётных данных других авторов. На основании выполненных вычислительных экспериментов и результатов сравнительного анализа можно говорить об адекватности предложенной модели исследуемым физическим процессам. Также по результатам апробации дифференциальных моделей турбулентности различного уровня замыкания впервые установлено, что при исследовании аэродинамически сложных течений в уличных каньонах с небольшими массивами деревьев, по дну которых интенсивно движется автотранспорт, может применяться «k-ε»-модель турбулентности с нелинейной зависимостью компонент тензора анизотропии турбулентных напряжений от компонент тензоров скорости деформации и завихренности.

На основе проведённого параметрического анализа для двумерной модели уличного каньона исследовано влияние геометрических размеров, метеорологических факторов, наличия и размеров массивов растительности и местоположения, а также интенсивности движущегося в уличном каньоне автотранспорта. Показано, что высокие уровни концентрации примеси в каньоне наблюдаются при низ-

кой скорости основного потока. Кроме того, расположение источников выбросов загрязнения на дне каньона также является существенным. Показано, что городская растительность оказывает стабилизирующий эффект на турбулентный поток, т.е. в относительно изолированных областях, таких как уличный каньон, имеет место значительное уменьшение скорости и уровня турбулентности, что, несомненно, сказывается на проветриваемости и процессах, связанных с турбулентным рассеиванием. Учёт эффектов, сопряжённых с передвижением автотранспорта, говорит о том, что движущиеся автомобили способствуют интенсификации процессов перемешивания в объёме городского каньона.

Численная реализация LES-микромасштабной модели осуществляется на основе метода конечного объема, явных разностных схем второго порядка по времени и пространству. В гидродинамической части модели для согласования полей скорости и давления использовалась схема предиктор–корректор, в соответствии с которой явная схема Адамса–Бэшфорда для уравнения движения выполняет функцию предиктора, а коррекция поля скорости осуществляется на основе решения разностного уравнения Пуассона для поправки давления. На основе вычислительных экспериментов, проведенных на многопроцессорной вычислительной системе с распределенной памятью для рассматриваемых в работе задач, показано, что необходимая для получения результатов за приемлемое время параллельная реализация вихреразрешающей модели турбулентности должна использовать двумерную геометрическую декомпозицию сеточной области исследования, а также параллельный алгоритм сопряженных градиентов в сочетании с предобуславливанием по методу Зейделя с красно-черным упорядочиванием для решения разностного эллиптического уравнения для поправки давления. Тестирование предложенной математической модели и численного метода проведены на экспериментальных и расчетных данных других авторов. На основании выполненных вычислительных экспериментов и результатов сравнительного анализа можно говорить об адекватности предложенной модели исследуемым физическим процессам. На задачах турбулентного течения в канале и обтекания цилиндра квадратного сечения на основе вычислительного эксперимента показано, что для корректного расчета параметров потока и его турбулентной

структуры с помощью используемой вихреразрешающей модели, опирающейся на явные разностные схемы второго порядка аппроксимации в сочетании с динамической подсеточной моделью, лучшие результаты показывает применение противопотоковой схемы QUICK Леонарда для аппроксимации конвективных членов по сравнению с центрально-разностными схемами или противопотоковой схемой MLU. На основе построенной математической модели турбулентного течения несжимаемой среды для трехмерной модели уличного каньона проведен ряд расчетов, результаты которых показывают, что максимальные концентрации примеси наблюдаются у подветренной стороны каньона и вблизи источников примеси. Кроме того, показано, как расположение источника примеси на дне каньона и геометрические параметры исследуемой области влияют на картину течения и распределения примеси.

Выполнены расчёты пространственных турбулентных вихревых течений вокруг плохообтекаемых прямоугольных препятствий, которые позволили на основе сравнения с экспериментальными и рассчитанными по ANSYS Fluent данными выявить слабые и сильные стороны выбранных схем замыкания. Предложена и апробирована методика оценки адекватности микромасштабной модели на основе статистических интегральных параметров, полученных расчётным путём и экспериментально.

Предложенные микромасштабные модели были применены для расчёта турбулентного течения и переноса примеси для реальных участков городской застройки городов. Результаты численного анализа позволили определить районы уличных каньонов, подверженные наибольшей экологической опасности.

Список литературы

1. *Белов И.В., Беспалов М.С., Клочкова Л.В. и др.* Сравнение моделей распространения загрязнений в атмосфере // Математическое моделирование. – 1999. – Т. 11, №8. – С. 52–64.
2. *Белов И.В., Беспалов М.С., Клочкова Л.В. и др.* Транспортная модель распространения газообразных примесей в атмосфере города // Математическое моделирование. – 2000. – Т. 12, № 11. – С. 38–46.
3. *Берлянд М.Е.* Прогноз и регулирование загрязнений атмосферы. – Л.: Гидрометеиздат, 1985. – 168 с.
4. *Калиткин Н.Н., Карпенко Н.В., Михайлов А.П. и др.* Математические модели природы и общества. – М.: Физматлит, 2005. – 360 с.
5. *Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Самарская Е.А., Тишкин В.Ф.* Методы математического моделирования окружающей среды. – М.: Наука, 2000. – 256 с.
6. *Михайлюта С.В., Тасейко О.В.* Уровень загрязнения приземной атмосферы Красноярска (холодный период) // Экология и промышленность России. – 2003. – Октябрь. – С. 4–8.
7. *Михайлюта С.В., Тасейко О.В.* Исследование процессов формирования уровней загрязнения приземной атмосферы г. Красноярска // Вычислительные технологии. – 2004. – Т. 9, ч. 2. – С. 115–123.
8. *Тасейко О.В., Михайлюта С.В.* Моделирование пространственного распределения загрязнителей от автотранспорта в условиях городской застройки // География и природные ресурсы. – 2005. – Специальный выпуск. – С. 180–185.
9. *Baklanov A.* Overview of the European project FUMAPEX // Atmospheric Chemistry and Physics. – 2006. – Vol. 6. – P. 2005–2015.
10. *Baklanov A., Hanninen O., Slordal L.H.* Integrated systems for forecasting urban meteorology, air pollution and population exposure // Atmospheric Chemistry and Physics. – 2006. – Vol. 7. – P. 855–874.
11. *Марчук Г.И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1982. – 320 с.
12. *Пененко В.В., Алоян А.Е.* Модели и методы для задач охраны окружающей среды. – М.: Наука, 1985. – 256 с.

13. *Chang J.C., Hanna S.R., Boybeyi Z., Franzese P.* Use of Salt Lake city URBAN 2000 field data to evaluate the urban hazard prediction assessment capability (HPAC) dispersion model // *Journal of Applied Meteorology*. – 2005. – Vol. 44, № 4. – P. 485–501.
14. *Neophytou M.K., Britter R.E.* A simple correlation for pollution dispersion prediction in urban areas // *DAPPLE Cambridge Note 1*. – January 2004 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.dapple.org.uk>.
15. *Pavageau M., Schatzmann M.* Wind tunnel measurements of concentration fluctuations in an urban street canyon // *Atmospheric Environment*. – 1999. – Vol. 33. – P. 3961–3971.
16. *Uehara K., Murakami S., Oikawa S., Wakamatsu S.* Wind tunnel experiments on how thermal stratification affects flow in and above urban street canyons // *Atmospheric Environment*. – 2000. – Vol. 34. – P. 1553–1562.
17. *Gromke C., Blocken B.* Influence of avenue-trees on air quality at the urban neighborhood scale. – Part I: Quality assurance studies and turbulent Schmidt number analysis for RANS CFD simulations // *Environmental Pollution*. – 2015. – Vol. 196. – P. 214–223.
18. *Hang J., Li Y., Sandberg M.* Experimental and numerical studies of flows through and within high-rise building arrays and their link to ventilation strategy // *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.* – 2011. – Vol. 99. – P. 1036–1055.
19. *Gromke C., Buccolieri R., Sabatino S.D., Ruck B.* Dispersion study in a street canyon with tree planting by means of wind tunnel and numerical investigations – Evaluation of CFD data with experimental data // *Atmospheric Environment*. – 2008.
20. *Gromke C.* A vegetation modeling concept for Building and Environmental Aerodynamics wind tunnel tests and its application in pollutant dispersion studies // *Environmental Pollution*. – 2011. – P. 159.
21. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. – 8-е изд., перераб. – М.: Наука, 1977. – 440 с.
22. *Eliasson I., Offerle B., Grimmond C.S.B., Lindqvist S.* Wind fields and turbulence statistics in an urban street canyon // *Atmospheric Environment*. – 2006. – Vol. 40. – P. 1–16.
23. *Brown M., Lawson R., DeCroix D., Lee R.* Mean flow and turbulence measurements around a 2D array of buildings in a wind tunnel // 11th Joint AMS/AWMA Conference on the Application of Air Poll. Meteor. – Long Beach, CA, 2000.
24. *Gerdes F., Olivari D.* Analysis of pollutant dispersion in an urban street canyon // *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. – 1999. – Vol. 82, № 1. – P. 105–124.

25. *Kastner-Klein P., Fedorovich E., Rotach M.W.* A wind tunnel study of organised and turbulent air motions in urban street canyons // *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. – 2001. – Vol. 89, № 9. – P. 849–861.
26. *Kastner-Klein P., Plate E.J.* Wind-tunnel study of concentration fields in street canyons // *Atmospheric Environment*. – 1999. – Vol. 33, № 24–25. – P. 3973–3979.
27. *Salmond J.A., Williams D.E., Laing G. et al.* The influence of vegetation on the horizontal and vertical distribution of pollutants in a street canyon // *Science of the Total Environment*. – 2013. – Vol. 443. – P. 287–298.
28. *Jin S., Guo J., Wheeler S. et al.* Evaluation of impacts of trees on PM_{2.5} dispersion in urban streets // *Atmospheric Environment*. – 2014. – Vol. 99. – P. 277–287.
29. *Tomlin A.S.* A field study of factors influencing the concentrations of a traffic-related pollutant in the vicinity of a complex urban junction // *Atmospheric Environment*. – 2009. – Vol. 43. – P. 5027–5037.
30. *Rotach M.W., Vogt R., Bernhofer C.* BUBBLE an urban boundary layer meteorology project // *Theoretical and Applied Climatology*. – 2005. – Vol. 81, № 3–4. – P. 231–261.
31. *Leach M.J.* Final Report for the Joint Urban 2003 Atmospheric Dispersion Study in Oklahoma City: Lawrence Livermore National Laboratory participation. LLNL report UCRL-TR-216437. – 2005.
32. *Yee E., Biltoft C.A.* Concentration fluctuation measurements in a plume dispersing through a regular array of obstacles // *Boundary-Layer Meteorology*. – 2004. – Vol. 111. – P. 363–415.
33. *Dallman A., Magnusson S., Britter R. et al.* Conditions for thermal circulation in urban street canyons // *Building and Environment*. – 2014. – Vol. 80. – P. 184–191.
34. *Vernay D.G., Raphael B., Smith I.F.C.* Augmenting simulations of airflow around buildings using field measurements // *Advanced Engineering Informatics*. – 2014. – Vol. 28. – P. 412–424.
35. *Biltoft C.A.* Customer report for Mock Urban Setting Test. DPG Document No. WDTC-FR-01-121. – 2001. – 55 p.
36. *Britter R., Schatzmann M.* Quality assurance and improvement of micro-scale meteorological models. – Hamburg : COST Office, 2007. – P. 28.
37. *Franke J., Hellsten A., Schlüenzen H., Carissimo B.* Best practice guideline for the CFD simulation of flows in the urban environment. – Hamburg : COST Office, 2007. – P. 59.

38. *Bezpalcova K., Harms F.* EWTL data report / Part I: summarized test description Mock Urban Setting Test. Environmental Wind Laboratory, Center for Marine and Atmospheric Research. Hamburg, 2005. – P. 11.
39. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www2.dmu.dk/atmosphericenvironment/Trapos/>.
40. *Ketzel M., Berkowicz R., Lohmeyer A.* Comparison of numerical street dispersion models with results from wind tunnel and field measurements // Environmental Monitoring and Assessment. – 2000. – Vol. 65. – P. 363–370.
41. *Ketzel M., Louka P., Sahm P. et al.* Intercomparison of numerical urban dispersion models – Part II: street canyon in Hannover, Germany // Water, Air and Soil Pollution. – 2002. – Vol. 2, № 5–6. – P. 603–613.
42. *Louka P.* Contribution of Petroula Louka to the TRAPOS WG-TPT meeting in Cambridge. – 2000 [электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www2.dmu.dk/AtmosphericEnvironment/trapos/texte/louka-camb.pdf>
43. *Louka P., Ketzel M., Sahm P., Guilloteau E.* // Proc. 7th International Conference on Environmental Science and Technology. – Syros, Greece, 2001.
44. *Louka P., Vachon G., Sini J.-H. et al.* Thermal effects on the airflow in a street canyon - NANTES'99 experimental results and model simulation // Water, Air and Soil Pollution. – 2002. – Vol. 2. – P. 351–364.
45. *Андерсон Д., Таннехил Д., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. 1-е изд. – М.: Мир, 1990. – 382 с.
46. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа: учеб. для вузов. – 7-е изд., испр. / Л.Г. Лойцянский. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
47. *Глазунов А.В.* Вихревое моделирование турбулентности с использованием смешанного динамического замыкания // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. – 2009. – Т. 45, № 1. – С. 7–28.
48. *Курбацкий А.Ф.* Лекции по турбулентности: В 2 ч. / А.Ф. Курбацкий. Введение в турбулентность. – Новосибирск, 2000. – Т. 1. – 118 с.; Моделирование турбулентных течений. – Новосибирск, 2001. – Т. 2. – 136 с.
49. *Патанкар С.В.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 124 с.
50. Турбулентные сдвиговые течения: пер. с англ.; ред. А.С. Гиневский. – М.: Машиностроение, 1982. – Т. 1. – 432 с.
51. *Sagaut P.* Large eddy simulation for Incompressible Flow 3rd ed. An Series: Scientific Computation, 2006. – XXIX. – 556 p.
52. *Хлопков Ю.И.* Ренормгрупповые методы описания турбулентных движений несжимаемой жидкости / Ю.И. Хлопков, В.А. Жаров, С.Л. Горелов. – М.: Изд-во МФТИ, 2006. – 491 с.

53. Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса / А.Н. Колмогоров // ДАН СССР. 1941. – Т. 30. – С. 299–303.
54. Колмогоров А.Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости / А.Н. Колмогоров // ДАН СССР. Физика. 1942. – Т. 6, № 1–2. – С. 56–58.
55. Белоцерковский О.М. Динамика пространственных вихревых течений в неоднородной атмосфере. Вычислительный эксперимент / О.М. Белоцерковский, В.А. Андрущенко, Ю.Д. Шевелев. – М. : Янус-К, 2000. – 456 с.
56. Moin P. On the numerical solution of time dependent viscous incompressible fluid flows involving solid boundaries / P. Moin, J. Kim // Journal of Computational Physics. – 1980. – Vol. 35. – P. 381–392.
57. Hoyas S. Scaling of the velocity fluctuations in turbulent channels up to $Re=2003$ / S. Hoyas, J. Jimenez // Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford Univ. – 2005. – P. 351–356.
58. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред / О.М. Белоцерковский. – М. : Наука, 1982. – 520 с.
59. Хлопков Ю.И. Лекции по теоретическим методам исследования турбулентности / Ю.И. Хлопков. – М. : МФТИ, 2005. – 178 с.
60. Deardorff J.W. A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers / J.W. Deardorff // J. Fluid Mech. – 1970. – Vol. 41. – P. 453–480.
61. Deardorff J.W. The use of subgrid transport equations in a three-dimensional model of atmospheric turbulence / J.W. Deardorff // Journal of Fluids Engineering. – 1973. – Vol. 9. – P. 429–438.
62. Walton A. Large-eddy simulation of pollution dispersion in an urban street canyon. Part 2: idealised canyon simulation / A. Walton, A.Y.S. Cheng // Atmospheric Environment. – 2002. – Vol. 36. – P. 3615–3627.
63. Монин А.С. Статистическая гидромеханика / А.С. Монин, А.М. Яглом. – СПб. : Гидрометеоиздат, 1992. – Т. 1; М. : Наука, 1967. – Т. 2.
64. Хинце О. Турбулентность: пер. с англ; под ред. Г. Н. Абрамовича / О. Хинце. – М. : Физматгиз, 1963. – 680 с.
65. Spalart P.R. Strategies for turbulence modelling and simulations // Int. J. of Heat and Fluid Flow. – 2000. – Vol. 21. – P. 252–263.
66. Волков К.Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений / К.Н. Волков, В.Н. Емельянов. – М. : Физматлит, 2008. – 368 с.
67. Jones W.P., Launder B.E. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1972. – Vol. 15. – P. 301–314.

68. *Launder B.E., Sharma B.I.* Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc // *Letters in Heat Mass Transfer.* – 1974. – Vol. 1. – P. 131–138.
69. *Launder B.E., Spalding D.B.* *Mathematical models of turbulence.* – London : Academic Press, 1972. – 169 p.
70. *Chou P.-Y.* On velocity correlations and the solution of the equations of turbulent fluctuations // *Quarterly of Applied Mathematics.* – 1945. – Vol. 3. – P. 38.
71. *Давыдов В.И.* О статистической динамике несжимаемой турбулентной жидкости // *ДАН СССР.* – 1961. – Т. 136. – С. 47–50.
72. *Harlow F.H., Nakayama P.I.* Transport of turbulence energy decay rate / University of California Report LA-3854.: Los Alamos Sci.Lab. – 1968.
73. *Wilcox D.C.* *Turbulence modeling for CFD:* DCW Industries Inc, 1993. – P. 460.
74. *Spalart P.* Direct simulation of a turbulent boundary layer up to $Re = 1410$ // *Journal of Fluid Mechanics.* – 1988. – Vol. 187. – P. 61–98.
75. *Brundrett E., Baines W.D.* The production and diffusion of vorticity in duct flow // *Journal of Fluid Mechanics.* – 1964. – Vol. 19. – P. 375–392.
76. *Cheah S.C., Cheng L., Cooper D., Launder B.E.* On the structure of turbulent flow in spirally fluted tubes // *Proc. 5th International Symposium on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements.* – Paris, 1993.
77. *Launder B.E., Priddin C.H., Sharma B.I.* The calculation of turbulent boundary layers on spinning and curved surfaces // *Journal of Fluids Engineering.* – 1977. – Vol. 99. – P. 231–239.
78. *Huang H., Akutsu Y., Arai M., Tamura M.* A two-dimensional air quality model in an urban street canyon: evaluation and sensitivity analysis // *Atmospheric Environment.* – 2000. – Vol. 34. – P. 689–698.
79. *Baklanov A.A.* Application of CFD methods for modeling in air pollution problems: possibilities and gaps // *Environmental Monitoring and Assessment.* – 2000. – Vol. 65. – P. 181–189.
80. *Методы расчёта турбулентных течений:* пер. с англ. / ред. В. Колльман. – М.: Мир, 1984. – 463 с.
81. *Andren A.* Evolution of a turbulence closure scheme suitable for air-pollution application // *Journal of Applied Meteorology.* – 1990. – Vol. 29. – P. 224–239.
82. *Apsley D.D., Leschziner M.A.* A new low-Reynolds-number nonlinear two-equation turbulence model for complex flows // *International Journal of Heat and Fluid Flow.* – 1998. – Vol. 19. – P. 209–222.
83. *Gatski T.B., Speziale C.G.* On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows // *Journal of Fluid Mechanics.* – 1993. – Vol. 254. – P. 59–78.

84. *Pope S.B.* A more general effective-viscosity hypothesis // *Journal of Fluid Mechanics.* – 1975. – Vol. 72. – P. 331–340.
85. *Craft T.J., Launder B.E., Suga K.* Development and application of a cubic eddy viscosity model of turbulence // *International Journal of Heat and Fluid Flow.* – 1996. – Vol. 17. – P. 108–115.
86. *Speziale C.G.* On nonlinear k-l and k-eps models of turbulence // *Journal of Fluid Mechanics.* – 1987. – Vol. 178. – P. 459–475.
87. *Ehrhard J., Kunz R., Moussiopoulos N.* On the performance and applicability of nonlinear two-equation turbulence models for urban air quality modeling // *Environmental Monitoring and Assessment.* – 2000. – Vol. 65. – P. 201–209.
88. *Ehrhard J., Moussiopoulos N.* On a new nonlinear turbulence model for simulating flows around building-shaped structures // *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics.* – 2000. – Vol. 88. – P. 91–99.
89. *Wilcox D.C.* Reassessment of the scale determining equation for advanced turbulence models // *AIAA.* – 1988. – Vol. 26. – P. 1299–1310.
90. Closure strategies for turbulent and transitional flows / eds. B.E. Launder, N.D. Sandham. – Cambridge: University Press, 2002. – 600 p.
91. *Chiang C.C., Launder B.E.* On the calculation of turbulent heat transport downstream from an abrupt pipe expansion // *Numerical Heat Transfer.* – 1980. – Vol. 3. – P. 189–207.
92. *Johnson R.W., Launder B.E.* Discussion of ‘On the calculation of turbulent heat transport downstream from an abrupt pipe expansion’ // *Numerical Heat Transfer.* – 1982. – Vol. 5. – P. 493–496.
93. *Дубов А.С., Быкова Л.П., Марунич С.В.* Турбулентность в растительном покрове. – Л.: Гидрометеоиздат, 1979. – 183 с.
94. *Finnigan J.J.* Turbulent transport in flexible plant canopies // *The Forest-Atmosphere Interaction* / eds. B.A. Hutchinson, B.B. Hicks. – Dordrecht : D. Reidel Publishing Co., 1985.
95. *Katul G.G., Mahrt L., Poggi D., Sanz C.* One- and two-equation models for canopy turbulence // *Boundary-Layer Meteorology.* – 2004. – Vol. 113. – P. 81–109.
96. *Katul G.G., Chang W.-H.* Principal length scales in second-order closure models for canopy turbulence // *Journal of Applied Meteorology.* – 1999. – Vol. 38. – P. 1631–1643.
97. *Liu J., Black T.A., Novak M.D.* E-Epsilon Modeling of Turbulent Air Flow Downwind of a Model Forest Edge // *Boundary-Layer Meteorology.* – 1996. – Vol. 77. – P. 21–44.
98. *Wilson J.D., Shaw R.H.* A higher-order closure model for canopy flow // *Journal of Applied Meteorology.* – 1977. – Vol. 16. – P. 1198–1205.

99. *Ayotte K.W., Finnigan J.J., Raupach M.R.* A second-order closure for neutrally stratified vegetative canopy flows // *Boundary-Layer Meteorology*. – 1999. – Vol. 90. – P. 189–216.
100. *Raupach M.R., Shaw R.H.* Averaging procedures for flow within vegetation canopies // *Boundary-Layer Meteorology*. – 1982. – Vol. 22. – P. 79–90.
101. *Daly B.J., Harlow F.H.* Transport equations in turbulence // *Physics of Fluids*. – 1970. – Vol. 13. – P. 2634–2649.
102. *Fu S., Launder B.E., Leschziner M.A.* Modeling strongly swirling recirculating jet flow with Reynolds-stress transport closures // *Proc. Sixth Symposium on Turbulent Shear Flows*. – Toulouse, France, 1987.
103. *Gibson M.M., Launder B.E.* Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1978. – Vol. 86. – P. 491–511.
104. *Launder B.E.* Second-moment closure and its use in modeling turbulent industrial flows // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. – 1989. – Vol. 9. – P. 963–985.
105. *Lien F.S., Leschziner M.A.* Assessment of turbulent transport models including non-linear RNG eddy-viscosity formulation and second-moment closure // *Computers and Fluids*. – 1994. – Vol. 23, № 8. – P. 983–1004.
106. *Green S.* Modelling turbulent air flow in a stand of widely spaced trees // *The PHOENICS Journal of Computational Fluid Dynamics and its Application* – 1992. – Vol. 5. – P. 294–312.
107. *Sanz C.* A note on K-Epsilon modelling of vegetation canopy air-flow // *Boundary-Layer Meteorology*. – 2003. – Vol. 108. – P. 191–197.
108. *Kimura A., Iwata T., Mochida A.* Optimization of plant canopy model for reproducing aerodynamic effects of trees: (Part 1) // *Summaries of Technical Papers of Annual Meeting Architectural Institute of Japan*. – 2003. – Vol. 9. – P. 721–722.
109. *Katul G.G., Albertson J.D.* An investigation of high-order closure models for a forested canopy // *Boundary-Layer Meteorology*. – 1998. – Vol. 89. – P. 47–74.
110. *Eskridge R.E., Hunt J.C.R.* Highway modeling. Part I: prediction of velocity and turbulence fields in the wake of vehicles // *Journal of Applied Meteorology*. – 1979. – Vol. 18, № 4. – P. 387–400.
111. *Eskridge R.E., Rao S.T.* Measurements and predictions of traffic-induced turbulence and velocity fields near roads // *Journal of Applied Meteorology*. – 1983. – Vol. 22. – P. 1431–1443.
112. *Rao K.S.* ROADWAY-2: A model for pollutant dispersion near highways // *Water, Air and Soil Pollution*. – 2002. – Vol. 2. – P. 261–277.

113. *Katolicky J., Jicha M.* Eulerian-Lagrangian model for traffic dynamics and its impact on operational ventilation of road tunnels // *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. – 2005. – Vol. 93. – P. 61–77.
114. *Baumer D., Vogel B., Fiedler F.* A new parameterisation of motorway-induced turbulence and its application in a numerical model // *Atmospheric Environment*. – 2005. – Vol. 39, № 31. – P. 5750–5759.
115. *Mestayer P.G., Sini J.-F., Jobert M.* Simulation of the wall temperature influence on flows and dispersion within street canyons // *Proc. 3rd International Conference on Air Pollution*. – Porto Carras, 1995. – Vol. 1. – P. 106–109.
116. *Xie X., Huang Z., Wang J., Xie Z.* The impact of solar radiation and street layout on pollutant dispersion in street canyon // *Building and Environment*. – 2005. – Vol. 40. – P. 201–212.
117. *Dimitrova R., Sini J.-F., Richards K., Schatzman M.* CFD investigation of airflow around a simple obstacle with single heating wall: EURASAP Newsletter 63. – 2007. – P. 1–35.
118. *Ghosal S.* An analysis of numerical errors in large-eddy simulation of turbulence / S. Ghosal // *Journal Comput. Phys.* – 1996. – Vol. 125. – P. 187–206.
119. *Nakayama A.* On the influence of numerical schemes and subgrid-stress models on large eddy simulation of turbulent flow past a square cylinder / A. Nakayama, S.N. Vengadesan // *Int. J. Numer. Methods Fluids*. – 2002. – Vol. 38. – P. 227–253.
120. *Kravchenko A.G.* On the Effect of Numerical Errors in Large Eddy Simulation of Turbulence Flows / A.G. Kravchnko P. Moin // *J. Comp. Phys.* – 1997. – P. 310–322.
121. *Park N.* Discretization errors in large eddy simulation: on the suitability of centered and upwind-biased compact difference schemes / N. Park, J.Y. Yoo, H. Choi // *J. Comp. Phys.* – 2005. – P. 580–616.
122. *Gullbrand J.* The effect of numerical errors and turbulence models in large-eddy simulation of channel flow, with and without explicit filtering / J. Gullbrand, F.K. Chow // *J. Fluid Mech.* – 2003. – P. 323–341.
123. *Lund T.S.* On the use of discrete filters for large eddy simulation // *Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford Univ.* – 1997. – P. 83–95.
124. *Orszag A.* Transform method for calculation of vector coupled sums: application to the spectral form of the vorticity equation. // *J. Atmos. Sci.* – 1970. – Vol. 27. – 890 p.
125. *Van Leer B.* Towards the ultimate conservative difference scheme. – Part IV: A new approach to numerical convection // *J. Comput. Phys.* – 1977. – Vol. 23. – P. 276–299.

126. *Leonard B.* A Stable and Accurate Convective Modeling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation / B. Leonard // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 1979. – Vol. 19. – P. 59–98.
127. *Bardina J.* Improved subgrid scale models for large-eddy simulation / J. Bardina, J.H. Ferziger, W.C. Reynolds // *Am. Inst. Astronaut*. – 1980. – P. 80–135.
128. *Smagorinsky J.* General circulation experiments with the primitive equations. I: The basic experiment // *Monthly Weather Review*. – 1963. – Vol. 91, № 3. – P. 99–165.
129. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – Изд. 2-е перераб. и доп. / О.А. Ладыженская // *Букинист*. – 1970. – 288 с.
130. *Van Driest E.R.* On turbulent flow near a wall // *Jornal of Aeronautical Sciences*. – 1956. – Vol. 23. – P. 1007–1011.
131. *Germano M.* A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model / M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, W.H. Cabot // *Phys. Fluids. A*. – 1991. – Vol. 3. – P. 1760–1765.
132. *Piomelli U.* The inner-outer layer interface in large-eddy simulation with wall-layer models / U. Piomelli, E. Balaras, H. Pasinato, K. Squires and P. Spalart // *Int. J. Heat and Fluid Flow*. – 2003. – P. 538–550.
133. *Lilly D.K.* A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure model / D.K. Lilly // *Phys. Fluids A*. – 1992. – P. 633–635.
134. *Ghosal S.* A dynamic localization model for large eddy simulation of turbulent flows / S. Ghosal, T. Lund, P. Moin, K. Akselvoll // *J. Fluid Mech*. – 1995. – Vol. 286. – P. 229–255.
135. *Gokarn A.* Large eddy simulations of incompressible turbulent flows using parallel computing techniques / A. Gokarn, F. Battaglia1, R.O. Fox // *Int. J. Numer. Meth. Fluids*. – 2008. – Vol. 56, № 10. – P. 1819–1843.
136. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика: пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 612 с.
137. *Шевелёв Ю.Д.* Пространственные задачи вычислительной аэрогидродинамики. – М.: Наука, 1986. – 368 с..
138. *Андерсон Д.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен: в 2-х т.; пер. с англ. – М.: Мир, 1990.
139. *Ветлуцкий В.Н. и др.* Численные методы в динамике вязкой жидкости // *Моделирование в механике*. – 1987. – Т. 1, № 4. – С. 22–45.
140. *Самарский А.А.* Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М. : Наука, 1989. – 616 с.
141. *Самарский А.А.* Численные методы решения задач конвекции-диффузии / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М. : Эдиториал УРСС, 1999. – 247 с.
142. *Самарский А.А.* Устойчивость разностных схем / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М. : Наука, 1973. – 415 с.

143. Самарский А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. – М. : Наука, 1978. – 519 с.
144. Белов И.А., Шеленикевич В.А., Шуб Л.И. Моделирование гидромеханических процессов в технологии изготовления полупроводниковых приборов и схем. – Л.: Политехника, 1991. – 288 с.
145. Воеводин В.В. Параллельные вычисления / В.В. Воеводин, Вл.В. Воеводин. – СПб. : БХВ-Петербург, 2002. – 608 с.
146. Воеводин В.В. Численные методы, параллельные вычисления и информационные технологии / В.В. Воеводин. – М. : БИНОМ, 2008. – 320 с.
147. Kurbatskii A.F., Yakovenko S.N. Turbulence closure schemes suitable for air pollution and wind engineering // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 2000. – Vol. 87. – P. 231–241.
148. Launder B.E., Spalding D.B. The numerical computation of turbulent flows // Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1974. – Vol. 3, № 2. – P. 269–289.
149. Оке Т.Р. Климаты пограничного слоя / Т.Р. Оке. – Л. : Гидрометеоздат. – 1982. – 358 с.
150. Есаулов А.О. К выбору схем для численного решения уравнений переноса / А.О. Есаулов, А.В. Старченко // Вычислительная гидродинамика / ТГУ. – Томск, 1999. – С. 27–32.
151. Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей в задачах математической физики. – М.: Изд-во МГУ, 1991. – 156 с.
152. Бояришинов М.Г. Оценка влияния придорожного лесного массива на распространение автотранспортных выбросов // Математическое моделирование. – 2001. – Т. 13, № 8. – С. 53–64.
153. Бояришинов М.Г., Трусов П.В. Движение газовой смеси через область, содержащую растительный массив // Математическое моделирование. – 1999. – Т. 11, № 7. – С. 3–16.
154. Martinuzzi R., Tropea C. The flow around surface-mounted, prismatic obstacles placed in a fully developed channel flow // Journal of Fluid Engineering. – 1993. – Vol. 115. – P. 85–92.
155. Iaccarino G., Ooi A., Durbin P.A., Behnia M. Reynolds averaged simulation of unsteady separated flow // International Journal of Heat and Fluid Flow. – 2003. – Vol. 24. – P. 147–156.
156. Martinuzzi R., Havel B. Vortex shedding from two surface-mounted cubes in tandem // International Journal of Heat and Fluid Flow. – 2004. – V. 25, № 3. – P. 364–372.
157. Liedtke J., Leil B., Schatzmann M. Dispersion in a street canyon: Comparison of wind tunnel experiments with field measurements // Proc. Of Eurotrac Symposium 98.: WIT Press. – 1999. – P. 806–810.

158. *Gailis R.* Wind tunnel simulations of the mock urban setting test – experimental procedures and data analysis: DSTO–TR–1532. – Australia : Published by DSTO Platforms Sciences Laboratory, 2004.
159. *Oberkampf W.L., Trucano T.G.* Verification and validation in computational fluid dynamics // *Progress in Aerospace Sciences.* – 2002. – Vol. 38. – P. 209–272.
160. *Oberkampf W.L., Barone M.F.* Measures of agreement between computational and experiment: Validation metrics // *Journal of Computational Physics.* – 2006. – Vol. 217. – P. 5–36.
161. *Есаулов А.О., Старченко А.В.* Моделирование распространения примеси в приземном слое атмосферы // *Исследования по баллистике и смежным вопросам механики: сб. статей / под ред. И.Б. Богоряда.* – Вып. 4. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2001. – С. 16–17.
162. *Rodi W.* Status of large eddy simulation: results of a workshop / W. Rodi, J. Ferziger, M. Breuer, M. Pourquie // *J. Fluids Eng.* – 1997. – Vol. 119. – P. 248–262.
163. *Пасконов В.М.* Численное моделирование процессов тепло- и массообмена / В.М. Пасконов, В.И. Полежаев, Л.А. Чудов. – М. : Наука, 1984. – 288 с.
164. *Piomelli U.* Finite-Difference Computations of High Reynolds Number Flows Using the Dynamic Subgrid-Scale Model // *Theoret. Comput. Fluid Dynamics.* – 1995. – Vol. 7. – P. 2007–216.
165. *Van der Vorst H.A.* Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems // *SIAM Journal.* – 1992. – Vol. 13, № 2. – P. 631–644.
166. *Ильин В.П.* Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем / В.П. Ильин. – М. : Наука, 1995. – 287 с.
167. *Старченко А.В.* Сравнительный анализ некоторых итерационных методов для численного решения пространственной краевой задачи для уравнения эллиптического типа / А.В. Старченко // *Вестник Томского государственного университета.* – 2003. – № 10. С. 70–80.
168. *Жукаускас А.А.* Конвективный перенос в теплоприемниках / А.А. Жукаускас. – М. : Наука, 1982. – 472 с.
169. *Данилкин Е.А.* К вопросу об эффективности 3D-декомпозиции при численном решении уравнения переноса с использованием МВС с распределенной памятью // *Вестник ТГУ. Сер.: математики и механики.* – 2008. – № 2. – С. 39–46.
170. *Высокопроизводительные вычисления на кластерах: учеб. пособие / Д.А. Беликов, И.В. Говязов, Е.А. Данилкин и др.; под ред. А.В. Старченко.* – Томск : ТГУ, 2008. – 198 с.

171. *Гергель В.П.* Основы параллельных вычислений для многопроцессорных вычислительных машин / В.П. Гергель, Р.Г. Стронгин. – Нижний Новгород : Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2000. – 176 с.
172. *Ортега Дж.* Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем / Дж. Ортега. – М. : Мир, 1991. – 364 с.
173. *Деммель Дж.* Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения / Дж. Деммель. – М. : Мир, 2001. – 430 с.
174. *Богословский Н.Н.* Параллельная реализация алгоритма вычислительной гидродинамики SIMPLE / Н.Н. Богословский, А.О. Есаулов, А.В. Старченко // Труды Сибирской школы-семинара по параллельным вычислениям / ТГУ. – Томск, 2002. – С. 118–124.
175. *Kim J.* Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number / J. Kim, P. Moin, R. Moser // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1987. – Vol. 177. – P. 133–166.
176. *Niederschulte M.A.* Measurements of turbulent flow in a channel at low Reynolds numbers / M.A. Niederschulte, R.J. Adrian, T.J. Hanratty // *Experiments in Fluids*. – 1990. – Vol. 9. – P. 222–230.
177. *Lyn D.* A laser-Doppler velocimetry study of ensemble averaged characteristics of the turbulent near wake of a square cylinder / D. Lyn, S. Einav, W. Rodi et al. // *J. Fluid Mech*. – 1995. – Vol. 304. – P. 285–319.
178. *Hoydysh W.G.* Kinematics and dispersion characteristics of flows in asymmetric street canyons / W.G. Hoydysh, W.F. Dabberdt // *Atmospheric Environment*. – 1988. – Vol. 22. – P. 2677–2689.
179. *Нутерман Р.Б.* Моделирование аэродинамики и распространения выбросов от автотранспорта в городском подслое / Р.Б. Нутерман, А.А. Бакланов, А.В. Старченко // *Математическое моделирование*. – 2010. – Т. 22, № 4. – С. 3–22.
180. *Moin P.* Direct numerical simulation: A tool in turbulence research / P. Moin, K. Mahesh // *Annual Review of Fluid Mechanics*. – 1998. – Vol. 30. – P. 539–578.
181. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
182. *Seinfeld J.H., Pandis S.N.* Atmospheric Chemistry and Physics: From Air Pollution to Climate Change, Second Edition. – Wiley, 2006.
183. *Cheng Y., Lien F.S., Yee E.R., Sinclair R.* A comparison of large eddy simulations with a standard k- ϵ Reynolds-averaged Navier-Stokes model for the prediction of a fully developed turbulence over a matrix of cubes // *JWEIE* – 2003. – Vol. 91. – P. 1301–1328.
184. *Chun-Ho L., Barton M.C., Leung D.Y.C.* Large-eddy simulation of flow and pollutant transport in street canyons of different building-height-to-street-width ratios // *Journal of Applied Meteorology*. – 2004. – Vol. 43. – P. 1410–1424.

Список сокращений и обозначений

Сокращения

- АПС – атмосферный пограничный слой
СЛАУ – система линейных алгебраических уравнений
МВС – многопроцессорные вычислительные системы
ЯМБ – явный метод Булеева (неполной факторизации)
АЕ – aliasing errors (ошибки наложения)
COST – European Cooperation in the field of Scientific and Technical Research (европейское объединение в области научных и технических исследований)
DM – dynamic model (динамические модели)
DNS – Direct Numerical Simulation (прямое численное моделирование)
EVM – eddy viscosity models (модели, основанные на использовании турбулентной вязкости)
LES – Large Eddy Simulation (вихреразрешающее моделирование)
LEVM – Linear Eddy Viscosity Model («k-ε»-модель с замыкающими соотношениями Буссинеска)
MILES – monotone integrated large eddy simulation (монотонное моделирование крупных вихрей)
MUST – Mock Urban Setting Trial (эксперимент, посвящённый экспериментальному моделированию городской застройки)
NLEVM – Non-Linear Eddy Viscosity Model («k-ε»-модель с нелинейной зависимостью тензора анизотропии турбулентности от компонент тензоров скорости деформации и завихренности)
RANS – Reynolds Averaged Navier-Stokes (осреднённые по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса)
RSM – Reynolds Stress Model (дифференциальная модель для напряжений Рейнольдса)
TKE – Turbulent Kinetic Energy (турбулентная кинетическая энергия)
TE – truncation errors or difference errors (конечно-разностные ошибки)
SSM – scale similarity model (модели подобных масштабов)

Латинские символы

Обозначение	Размерность	Обозначаемый параметр
Rb	–	безразмерное число Ричардсона
Re	–	безразмерный критерий подобия число Рейнольдса
Sc	–	безразмерный критерий подобия число Шмидта
Pr	–	безразмерный критерий подобия число Прандтля
Sc_τ	–	безразмерный критерий подобия турбулентное число Шмидта
Pr_τ	–	безразмерный критерий подобия турбулентное число Прандтля
L	м	линейный масштаб энергосодержащих вихрей
η	м	линейный масштаб наименьших вихрей
S_{ij}	1/с	тензор скорости деформации
x, y, z и x_1, x_2, x_3	м	декартовы координаты
u, v, w	м/с	направление вектора скорости потока в направлениях x, y, z соответственно $(u, v, w) \equiv (u_1, u_2, u_3)$
u_*	м/с	динамическая скорость? или скорость трения $u_* = u_\tau$
$\overline{u'_i u'_j}$	м ² /с ²	компонента тензора напряжений Рейнольдса
z_0	М	высота шероховатости
C_D	–	коэффициент сопротивления растительности
$C_\mu, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}$	–	коэффициенты модели турбулентности
c	кг	концентрация примеси
Gr	–	безразмерный критерий подобия число Гразгофа
k	м ² /с ²	кинетическая энергия турбулентности
l	м	интегральный масштаб турбулентности
P	м ² /с ³	генерация энергии турбулентности

Греческие символы

Обозначение	Размерность	Обозначаемый параметр
δ_{ij}	–	символ Кронекера
κ	–	константа фон Кармана
μ	кг/м · с	коэффициент молекулярной вязкости воздуха
ν	м ² /с	коэффициент кинематической вязкости воздуха
ν_T	м ² /с	турбулентная вязкость
ρ	кг/м ³	плотность воздуха
τ_w	кг/(м · с)	трение на твёрдой стенке
β_P, β_d	–	коэффициенты модели растительного покрова
δ_{ij}	–	символ Кронекера
ε	м ² /с ³	вязкая диссипация энергии турбулентности
κ	–	константа фон Кармана
$\sigma_\kappa, \sigma_\varepsilon$	–	коэффициенты модели турбулентности
Ω_{ij}	1/с	тензор завихренности

Подстрочные и надстрочные индексы и другие обозначения

Обозначение	Обозначаемый параметр
$\langle \rangle_e, \langle \rangle_n, \langle \rangle_t$ $\langle \rangle_w, \langle \rangle_s, \langle \rangle_b$	относящиеся к соответствующим точкам контрольного объёма
—	знак осреднения по времени (RANS) и знак фильтрации (LES)
$\langle \rangle$	знак осреднения по объёму (RANS) и знак фильтрации (LES)

Научное издание

СТАРЧЕНКО Александр Васильевич
НУТЕРМАН Роман Борисович
ДАНИЛКИН Евгений Александрович

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ
И ПЕРЕНОСА ПРИМЕСИ
В УЛИЧНЫХ КАНЬОНАХ

Редактор В.Г. Лихачёва
Компьютерная вёрстка Е.А. Данилкин
Оригинал-макет Т.В. Дьяковой

Подписано в печать 10.12.2015 г.
Формат 60x84 ¹/₁₆. Бумага офсетная №1. Печ. л. 15,7; усл. печ. л. 14,6;
уч.-изд. л. 14,2. Тираж 250 экз. Заказ № 1535.

ООО «Издательство ТГУ», 634029, г. Томск, ул. Никитина, 4
Отпечатано на оборудовании Издательского Дома
Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел.: 8(382-2)53-15-28; 52-98-49
<http://publish.tsu.ru>; e-mail: riotsa@mail.ru